Chapitre 10: Comportements asymptotiques

1 Limite d'une fonction à l'infini

A) Introduction

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$ où a est un réel et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère. On s'intéresse à la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$, c'est à dire au comportement des réels $f(x)$ lorsque x prend des valeurs aussi grandes que l'on veut.

B) Limite réelle à l'infini et asymptote horizontale

Définition:
S'il existe un réel l tel que pour tout x assez grand, $f(x)$ est aussi proche de l que l'on veut, alors l est la limite en $+\infty$ de f et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

On dit que la fonction f tend vers le réel l en $+\infty$.

Remarque:
On définit de manière similaire, si elle existe, la limite l d'une fonction f en $-\infty$.

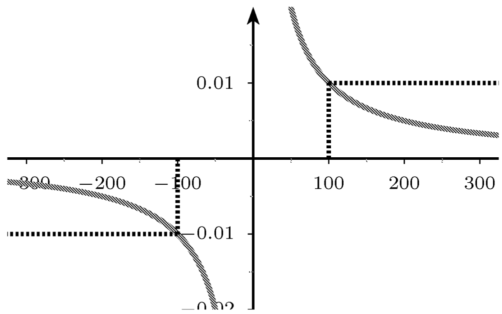
Exemple:
Soit f la fonction inverse définie pour tout réel x non-nul par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]0; 0,001[$ pour $x > 100$, on dit que f a pour limite 0 en $+\infty$ et on note :*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]-0,001; 0[$ pour $x < -100$, on dit que f a pour limite 0 en $-\infty$ et on note :*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

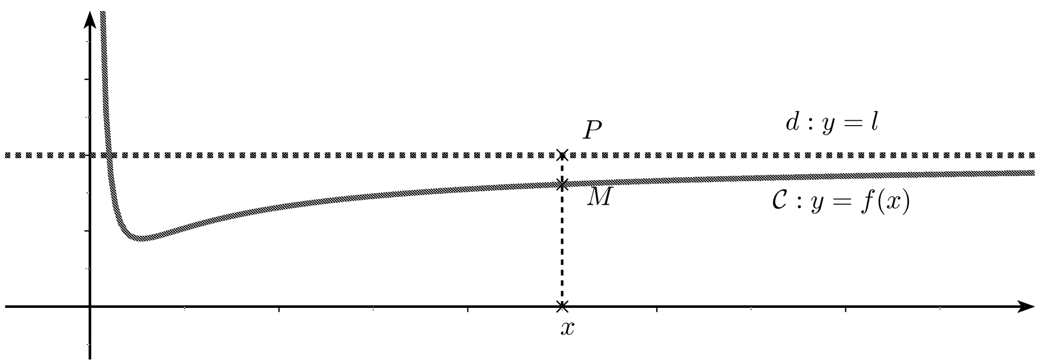


Définition:
S'il existe un réel l tel que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$. Cette asymptote est dite horizontale.

Interprétation graphique :



M et P sont les points d'abscisses x situés respectivement sur la courbe $\mathcal{C}$ et sur la droite d d'équation $y = l$. Dire que d est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$ signifie que la distance MP tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Remarque:
On définit de manière similaire, si elle existe, une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

C) Limite infinie à l'infini et asymptote oblique

Définition:
Lorsque pour tout réel M et pour tout x assez grand, $f(x)$ est plus grand que M, on dit que la limite de f en $+\infty$ de f est $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Lorsque pour tout réel M et pour tout x assez grand, $f(x)$ est plus petit que M, on dit que la limite de f en $+\infty$ de f est $-\infty$ et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Remarque:
On définit de même une limite en $-\infty$ qui tend vers $-\infty$ ou $+\infty$.

Exemple:
Soit f la fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]1000; +\infty[$ pour $x > 100$, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note :*

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]-\infty; -1000[$ pour $x < -100$, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note :*

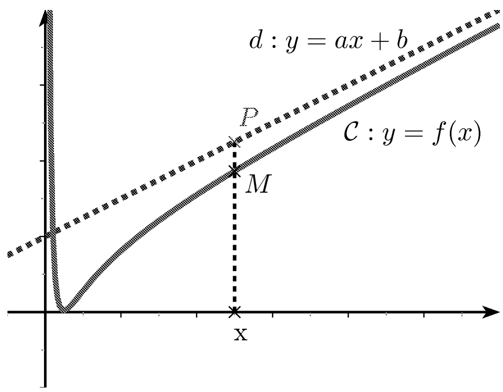
$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

Définition:
a et b sont deux réels avec $a \neq 0$. $\mathcal{C}$ est la courbe d'une fonction f dans un repère. Lorsque :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Interprétation graphique :



M et P sont les points d'abscisses x situés respectivement sur la courbe $\mathcal{C}$ et sur la droite d d'équation $y = ax + b$. Dire que d est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$ signifie que la distance MP tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Remarque:
On définit de manière similaire, si elle existe, une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

2 Limite d'une fonction en un réel

A) Introduction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I ou une borne de I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère. On s'intéresse à la limite de f en a, c'est à dire au comportement des réels $f(x)$ lorsque x prend des valeurs aussi proches de a que l'on veut.

B) Limite finie en a

Définition:
Soit l un réel. On dit que la limite de f en a est l, si lorsque x tend vers a, $f(x)$ est aussi proche de l que l'on veut. On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Exemple:
Soit f la fonction affine $f(x) = -5x + 1$. La limite de f en 2 est 9 :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(9) = 9$$

C) Limite infinie en a et asymptote verticale

Définition:
On dit que la limite de f en a est $+\infty$ si, lorsque x tend vers a, $f(x)$ est aussi grand que l'on veut et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Exemple:
Soit f la fonction inverse définie pour tout réel non-nul x par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]100; +\infty[$ pour $0 < x < 0,01$, on dit que f a pour limite $+\infty$ à droite en 0 et on note :*

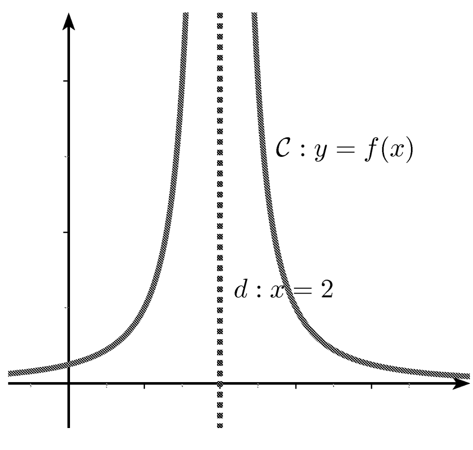
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \textit{ou} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

- *Les réels $f(x)$ sont dans l'intervalle $]-\infty; -100[$ pour $-0,01 < x < 0$, on dit que f a pour limite $-\infty$ à gauche en 0 et on note :*

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \textit{ou} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Définition:
Soit a un réel et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère. Lorsque la limite (à droite ou à gauche) de f en a est $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

Interprétation graphique :



Ici la droite d d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$. On a :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

3 Règles opératoires

A) Bornes de l'ensemble de définition

Lorsque l'ensemble de définition D d'une fonction f est un intervalle ou une réunion d'intervalles, on appelle bornes de D les extrémités de ces intervalles. On étudie, en général, la limite de la fonction f en chacune des bornes de D qui n'appartiennent pas à D.

Exercice:
f est la fonction définie sur $D =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$. On étudie les limites de f aux bornes de D, c'est à dire en $-\infty$ ou en $+\infty$.

B) Limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions

Soit f et g deux fonctions dont on connait la limite en un réel a (ou en $-\infty$ ou en $+\infty$). La question légitime que l'on peut se poser est :

Les fonctions $f + g$, $f \times g$ et $\dfrac{f}{g}$ ont-elles une limite et si oui quelle est-elle ?

1) Limite d'une somme

Théorème:
Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels et a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et la limite de g en a est	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors la limite de $(f+g)$ en a est	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*FI*

*FI signifie **forme indéterminée**, c'est à dire qu'on doit effectuer une étude particulière pour déterminer la limite de $(f+g)$.*

Exercice:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \textit{donc} \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 + \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} -3x + 2 = -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = -\infty \quad \textit{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} -3x + 2 - \sqrt{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \textit{donc} \quad \lim_{x\to0^+} \sqrt{x} + \frac{1}{x} = +\infty$$

2) Limite d'un produit

Théorème:
Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels et a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et la limite de g en a est	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors la limite de $(f\times g)$ en a est	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*

Exercice:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty \quad \textit{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} -x^2\sqrt{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to-\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3 \quad \textit{donc} \quad \lim_{x\to-\infty} (2 + \frac{1}{x})(3 + \frac{1}{x}) = 6$$

3) Limite d'un quotient

On distingue ici deux cas :

- $\boxed{\text{le dénominateur a une limite non-nul :}}$

Théorème:
Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels et a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et la limite de g en a est	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$
alors la limite de $\dfrac{f}{g}$ en a est	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*

Exercice:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty}-2+\frac{1}{x}=-2 \quad donc \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{-2+\dfrac{1}{x}}=-\infty$$

- $\boxed{\text{le dénominateur a une limite nul :}}$

Théorème:
Dans le tableau suivant, l est un réel non-nul et a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	0
et la limite de g en a est	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors la limite de $\frac{f}{g}$ en a est	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*

Exercice:

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}=0^+ \quad et \quad \lim_{x\to0^+}2x+7=7 \quad donc \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+7}{\sqrt{x}}=+\infty$$

C) Formes indéterminées

D'après ce qui a été vu précédemment, on compte quatre formes indéterminés :

$$"\infty-\infty" \qquad "0\times\infty" \qquad "\frac{\infty}{\infty}" \qquad "\frac{0}{0}"$$

Dans ce cas, il faut faire une étude particulière pour "lever l'indétermination".

Nous allons ici étudier de façon général les limites à l'infini des fonctions polynômes et rationnelles pour lever immédiatement les éventuelles indétermination.

D) Limites à l'infini des fonctions polynômes

Théorème:
La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ (ou en $-\infty$) est celle de son monôme de plus haut degré.

Exercice:
Soit la fonction polynôme $f(x)=5x^3-7x^2+3x-8$, son monôme de plus haut degré est $5x^3$:

$$\lim_{x\to+\infty}5x^3=+\infty \quad donc \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

E) Limites à l'infini des fonctions rationnelles

Théorème:
La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ (ou en $-\infty$) est celle du quotient des monômes de plus haut degré.

Exercice:
Soit la fonction rationnelle $f(x)=\dfrac{5x^3-7x^2+3x-8}{-6x^4+2}$, son monôme de plus haut degré au numérateur est $5x^3$ et son monôme de plus haut degré au dénominateur est $-6x^4$:

$$Pour\ x\neq0, \quad \frac{5x^3}{-6x^2}=-\frac{5}{6x} \quad et \quad \lim_{x\to+\infty}-\frac{5}{6x}=0 \quad donc \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$