L'essentiel du chapitre 10

1) Limite finie d'une fonction à l'infini et asymptote horizontale

Définition:
S'il existe un réel l tel que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

La droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à courbe de la fonction f en $+\infty$.

Exemple:
Soit la fonction $f(x) = 7 + \dfrac{2}{x}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad donc \quad \lim_{x \to +\infty} 7 + \frac{2}{x} = 7$$

La droite d'équation $y = 7$ est une asymptote horizontale à courbe de la fonction f en $+\infty$.

2) Limite infinie d'une fonction à l'infini et asymptote oblique

Définition:
a et b sont deux réels avec $a \neq 0$. Lorsque :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à courbe de la fonction f en $+\infty$.

Exemple:
Soit la fonction rationnelle $f(x) = -2x + 3 + \dfrac{3}{x-2}$,

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (-2x + 3)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x-2} = 0$$

La droite Δ d'équation $y = -2x + 3$ est une asymptote oblique à courbe de la fonction f en $+\infty$.

3) Limite infinie d'une fonction en a et asymptote verticale

Définition:
On dit que la limite de f en a est $+\infty$ si, lorsque x tend vers a, $f(x)$ est aussi grand que l'on veut et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

On dit alors que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à courbe de la fonction f en a.

Exemple:
Soit la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-3}$,

$$\lim_{x \to 3^+} x - 3 = 0^+ \quad et \quad \lim_{x \to 3^+} 3x + 1 = 10 \quad donc \quad \lim_{x \to 3^+} \frac{3x+1}{x-3} = +\infty$$

La droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à courbe de la fonction f en 3.

4) Fonction polynôme et rationnelle

Théorème:
La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ (ou en $-\infty$) est celle de son monôme de plus haut degré.

Exemple:
Soit la fonction polynôme $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x - 8$, son monôme de plus haut degré est $5x^3$:

$$\lim_{x \to +\infty} 5x^3 = +\infty \quad donc \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Théorème:
La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ (ou en $-\infty$) est celle du quotient des monômes de plus haut degré.

Exemple:
Soit la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{5x^3 - 7x^2 + 3x - 8}{-6x^4 + 2}$, son monôme de plus haut degré au numérateur est $5x^3$ et son monôme de plus haut degré au dénominateur est $-6x^4$:

$$Pour\ x \neq 0, \quad \frac{5x^3}{-6x^2} = -\frac{5}{6x} \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} -\frac{5}{6x} = 0 \quad donc \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$