

Chapitre 11: Probabilités

1 Loi de probabilité

Définition:

Une expérience est dite **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs issues possibles et que l'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée. On note $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

Exemple:

Lancer un dé dont les faces sont numérotés de 1 à 6 est une expérience aléatoire et $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Définition:

Définir une loi de probabilité sur Ω , c'est associer à chaque issue x_i un nombre p_i positif ou nul de telle façon que

$$p_1 + \dots + p_n = 1$$

Ce nombre p_i est appelé probabilité de l'issue x_i .

Remarques:

- On dit qu'on **modélise** une expérience aléatoire dont les issues constituent Ω lorsque on choisit une loi de probabilité sur Ω qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.
- Pour une expérience donnée dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences obtenues dans des séries de taille n se rapproche de la loi de probabilité quand n devient grand.

Exemple:

Lancer un dé équilibrée dont les faces sont numérotés de 1 à 6 est une expérience aléatoire et $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On modélise l'expérience aléatoire en définissant la loi de probabilité suivante sur Ω :

issue	1	2	3	4	5	6
probabilite	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Notre modèle est validé par des simulations effectuées à l'aide d'un tableur.

Définition:

Dans le cas où l'on associe à chacune des n issues d'une expérience aléatoire la même probabilité $p = \frac{1}{n}$, on parle de loi équirépartie.

Définition:

On considère une loi de probabilité définie sur $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ où les x_i sont des nombres réels et une loi de probabilité définie sur Ω :

- L'espérance de la loi de probabilité est le nombre :

$$E = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

- La variance de la loi de probabilité est le nombre :

$$V = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E)^2 = \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \right) - E^2$$

- L'écart-type de la loi de probabilité est le nombre :

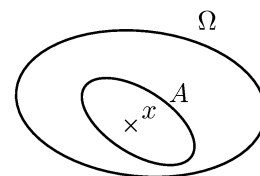
$$\sigma = \sqrt{V}$$

2 Probabilité d'un événement

Définition:

Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire :

- un événement est une partie de E ;
- un événement formé d'une seule issue est appelé un événement élémentaire ;
- lorsqu'une issue x appartient à un événement A , on dit que x réalise A ;
- lorsqu'aucune issue ne réalise un événement, on dit qu'il est impossible et on le note $\emptyset$;
- lorsque toutes les issues réalisent un événement, on dit qu'il est certain et on le note Ω .



Exemples:

Lancer un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 :

- L'événement « Obtenir un 7 » est un événement impossible.
- L'événement « Obtenir un résultat inférieur à 7 » est l'événement certain.

Définition:

Une loi de probabilité est définie sur l'ensemble Ω . La probabilité d'un événement A , notée $p(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A .

Propriété:

- Aucune issue ne réalise l'événement impossible donc $p(\emptyset) = 0$
- L'événement certain est réalisé par chacune des issues de Ω donc $p(\Omega) = 1$
- Pour tout événement A , $0 \leq p(A) \leq 1$

Exemple:

Un dé est pipé, on attribue les probabilités suivantes aux différentes faces :

issue	1	2	3	4	5	6
probabilite	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

On considère l'événement A « Obtenir un résultat pair ». A est réalisé par la sortie des faces 2, 4 et 6 donc

$$p(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

Propriété:

Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A est donnée par :

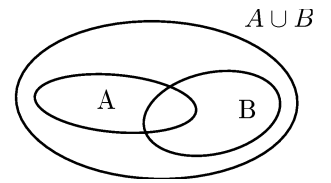
$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre total d'issues de } \Omega}$$

3 Calculs de probabilités

A et B sont deux événements de Ω

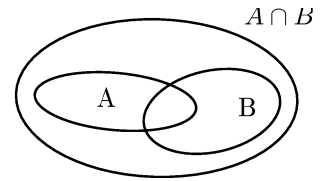
Définition:

L'événement $A \cup B$ (lire « A union B ») est formé des issues qui réalisent l'événement A ou l'événement B .



Définition:

L'événement $A \cap B$ (lire « A inter B ») est formé des issues qui réalisent l'événement A et l'événement B .



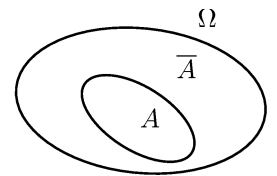
Propriété:

Une loi de probabilité est définie sur l'ensemble Ω . Pour tous événements A et B ,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Définition:

L'événement contraire de A est formé des issues qui ne réalisent pas A . On le note $\overline{A}$.



Propriété:

Une loi de probabilité est définie sur l'ensemble Ω . La probabilité d'un événement contraire d'un événement A est donnée par

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

4 Variables aléatoires

Définition:

Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Définir une variable aléatoire X sur Ω consiste à associer un réel à chaque issue.

Remarque:

Si x est un nombre réel, l'événement « X prend la valeur x » est noté $(X = x)$.

Exemple:

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie, on note les côtés apparus : P ou F , ainsi : $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$.

A chaque issue de l'expérience, on associe le nombre de fois où pile apparaît. On définit ainsi une variable aléatoire sur Ω , elle prend les valeurs 0, 1 et 2.

L'événement $(X = 1)$ est réalisé par les issues PF et FP donc on peut définir la loi de probabilité de la variable aléatoire X dans le tableau ci-dessous :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Définition:

Une loi de probabilité est définie sur Ω et $E = \{x_1, \dots, x_m\}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X .

Lorsqu'on associe à chaque valeur x_i la probabilité de l'événement $(X = x_i)$, on définit une loi de probabilité sur E .

Cette loi est appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X et

$$\sum_{i=1}^m p(X = x_i) = 1$$

Propriété:

L'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire X sont respectivement l'espérance, la variance et l'écart-type de sa loi de probabilité. En notant $p_i = p(X = x_i)$ pour chaque x_i , on obtient :

- L'espérance de la variable aléatoire X est définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^m p_i x_i$$

- La variance de la variable aléatoire X est définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^m p_i (x_i - E(X))^2 = \left(\sum_{i=1}^m p_i x_i^2 \right) - E(X)^2$$

- L'écart-type de la variable aléatoire X est définie par :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$