Chapitre 11: Probabilités

1 Loi de probabilité

Définition:
Une expérience est dite ***aléatoire*** *lorsqu'elle a plusieurs issues possibles et que l'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée. On note $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.*

Exemple:
Lancer un dé dont les faces sont numérotés de 1 à 6 est une expérience aléatoire et $\Omega = \dots$

Définition:
Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chaque issue x_i un nombre p_i positif ou nul de telle façon que

$$p_1 + \cdots + p_n = \dots$$

Ce nombre p_i est appelé probabilité de l'issue x_i.

Remarques:
- *On dit qu'on* ***modélise*** *une expérience aléatoire dont les issues constituent Ω lorsque on choisit une loi de probabilité sur Ω qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.*
- *Pour une expérience donnée dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences obtenues dans des séries de taille n se rapproche de la loi de probabilité quand n devient grand.*

Exemple:
Lancer un dé équilibrée dont les faces sont numérotés de 1 à 6 est une expérience aléatoire et $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On modélise l'expérience aléatoire en définissant la loi de probabilité suivante sur Ω :

issue	1	2	3	4	5	6
probabilite						

Notre modèle est validé par des simulations effectuées à l'aide d'un tableur.

Définition:
Dans le cas où l'on associe à chacune des n issues d'une expérience aléatoire la même probabilité $p = \dots\dots$, on parle de loi équirépartie.

Définition:
On considère une loi de probabilité définie sur $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ où les x_i sont des nombres réels et une loi de probabilité définie sur Ω :

- *L'espérance de la loi de probabilité est le nombre :*

$$E = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

- *La variance de la loi de probabilité est le nombre :*

$$V = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

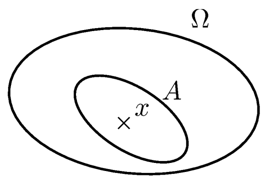
- *L'écart-type de la loi de probabilité est le nombre :*

$$\sigma = \dots\dots$$

2 Probabilité d'un événement

Définition:
Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire :

- *un événement est une partie de E ;*
- *un événement formé d'une seule issue est appelé un événement élémentaire ;*
- *lorsqu'une issue x appartient à un événement A, on dit que x réalise A ;*
- *lorsqu'aucune issue ne réalise un événement, on dit qu'il est impossible et on le note .... ;*
- *lorsque toutes les issues réalisent un événement, on dit qu'il est certain et on le note ....*



Exemples:
Lancer un dé équilibrée dont les faces sont numérotés de 1 à 6 :

- *L'événement « .... »est un événement impossible.*

- *L'événement « .... »est l'événement certain.*

Définition:
Une loi de probabilité est définie sur l'ensemble Ω. La probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A.

Propriété:
- *Aucune issue ne réalise l'événement impossible donc ....*
- *L'événement certain est réalisé par chacune des issues de Ω donc ....*
- *Pour tout événement A, ...*

Exemple:
Un dé est pipé, on attribue les probabilités suivantes aux différentes faces :

issue	1	2	3	4	5	6
probabilite	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

On considère l'événement A « Obtenir un résultat pair ». A est réalisé par la sortie des faces 2, 4 et 6 donc

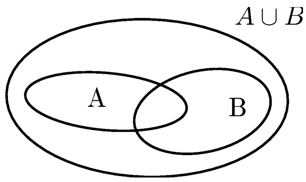
$$p(A) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété:
Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A est donnée par :

$$p(A) = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

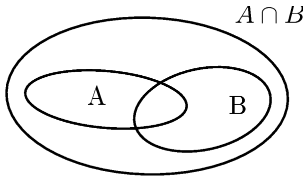
3 Calculs de probabilités

A et B sont deux événements de Ω



Définition:
L'événement $A \cup B$ (lire « A union B »)est formé des issues

qui réalisent l'événement A ....l'événement B.

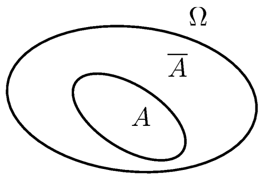


Définition:
L'événement $A \cap B$ (lire « A inter B »)est formé des issues

qui réalisent l'événement A ....l'événement B.

Propriété:
Une loi de probabilité est définie sur l'ensemble Ω. Pour tous événements A et B,

$$p(A \cup B) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$



Définition:
L'événement contraire de A est formé des issues qui ne réalisent pas A. On le note ....

Propriété:
Une loi de probabilité est définie sur l'ensemble Ω. La probabilité d'un événement contraire d'un événement A est donnée par

$$p\left(\overline{A}\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

4 Variables aléatoires

Définition:
Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Définir une variable aléatoire X sur Ω consiste à associer un réel à chaque issue.

Remarque:
Si x est un nombre réel, l'événement « X prend la valeur x »est noté $(X = x)$.

Exemple:
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie, on note les côtés apparus : P ou F, ainsi : $\Omega = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

A chaque issue de l'expérience, on associe le nombre de fois où pile apparait. On définit ainsi une variable aléatoire sur Ω, elle prend les valeurs ......, ... et ....

L'événement $(X = 1)$ est réalisé par les issues ...... et ...... donc on peut définir la loi de probabilité de la variable aléatoire X dans le tableau ci-dessous :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	....	....	....

Définition:
Une loi de probabilité est définie sur Ω et $E = \{x_1, \ldots, x_m\}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.

Lorsqu'on associe à chaque valeur x_i la probabilité de l'événement $(X = x_i)$, on définit une loi de probabilité sur E.

Cette loi est appelé loi de probabilité de la variable aléatoire X et

$$\sum_{i=1}^{m} p(X = x_i) = \ldots\ldots$$

Propriété:
L'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire X sont respectivement l'espérance, la variance et l'écart-type de sa loi de probabilité. En notant $p_i = p(X = x_i)$ pour chaque x_i, on obtient :

- *L'espérance de la variable aléatoire X est définie par :*

$$E(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- *La variance de la variable aléatoire X est définie par :*

$$V(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- *L'écart-type de la variable aléatoire X est définie par :*

$$\sigma = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$