Chapitre 12: Convergence des suites

1 Notion de convergence

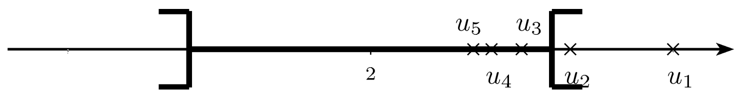
Définition:
On dit que la suite (u_n) converge vers le réel a si tout ouvert contenant a contient tous les termes d'une suite à partir d'un certain rang. On écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = a$$

Exemple:
On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ de terme général $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}$.

Soit $h > 0$ un nombre réel positif, tout intervalle de la forme $]2-h; 2+h[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang n_0.

Par exemple pour $h = 0,4$.
Tous les termes de la suite à partir du rang $n_0 = 3$ sont compris dans l'intervalle $]2 - 0,4; 2 + 0,4[=]1,6; 2,4[$.



On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ converge vers 2.

Remarque:
Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

2 Opérations sur les limites

Théorème:
Si les suite (u_n) *et* (v_n) *convergent respectivement vers les réels* a *et* b*, alors :*

- *la suite de terme général* $u_n + v_n$ *converge vers* $a + b$ *;*
- *la suite de terme général* $k \times u_n$ *converge vers* $k \times a$ *;*
- *la suite de terme général* $u_n \times v_n$ *converge vers* $a \times b$ *;*
- *si* $b \neq 0$*, la suite de terme général* $\dfrac{u_n}{v_n}$ *converge vers* $\dfrac{a}{b}$*.*

Exemple:
La suite de terme général $\left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(-3 + \dfrac{1}{n}\right)$ *converge vers* -6 *puisque la suite de terme général* $2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *converge vers* 2 *et la suite de terme général* $-3 + \dfrac{1}{n}$ *converge vers* -3*.*

Théorème:
Soit f *une fonction définie sur* $[0; +\infty[$ *et telle que :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

alors la suite (u_n) *de terme général* $u_n = f(n)$ *est convergente et sa limite est* a*.*

Exemple:
Soit la suite de terme général $u_n = \dfrac{1 + 2n}{n^2 + 3}$ *de la forme* $u_n = f(n)$ *où* f *est la fonction définie sur* $[0; +\infty[$ *par* $f(x) = \dfrac{1 + 2x}{x^2 + 3}$*.*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + 2x}{x^2 + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x}$$

donc la limite de la fonction f *en* $+\infty$ *est* 0*. On en déduit que :*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

Théorème: (Des gendarmes)
Soit (u_n)*,* (v_n) *et* (w_n) *trois suites telles que, à partir d'un certain rang, on ait :*

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = a \quad , \quad \lim_{n \to +\infty} w_n = a$$

où a *est un réel alors la suite* (v_n) *est convergente et sa limite* a *également.*

Exemple:
On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ *de terme général* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$*. Pour tout entier* n *non-nul,*

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

De plus, les suites de terme général $-\dfrac{1}{n}$ *et* $\dfrac{1}{n}$ *converge vers* 0 *donc d'après le théorème des gendarmes, la suite* (u_n) *est convergente et converge vers* 0*.*

3 Suite divergente

Définition:
On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, où A est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Exemple:
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n^2$.

Soit $A > 0$ un nombre réel positif, tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang n_0 tel que $n_0 > \sqrt{A}$. En effet,

$$u_n > A \Longleftrightarrow n^2 > A \Longleftrightarrow n > \sqrt{A}$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et on écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Définition:
Une suite (u_n) est dit divergente si elle n'est pas convergente vers un réel a.

Exemple:
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$.

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 1 \quad ; \quad u_2 = -1 \quad ; \quad u_3 = 1 \quad ; \quad \ldots$$

Cette suite est alternée, elle ne converge vers aucun réel mais n'a pas non plus pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.

Remarque:
Il y a deux type de suites divergentes :
- *celle qui n'ont aucune limite ;*
- *celle qui ont pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.*

Théorème:
Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang, on ait :

$$u_n \leq v_n$$

- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$;*
- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*

Exemple:
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n^2 + sin(n)$. Pour tout entier n,

$$n^2 - 1 \leq n^2 + sin(n)$$

De plus, la suite de terme général $n^2 - 1$ diverge vers $+\infty$ donc la suite (u_n) est divergente et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

4 Suites arithmétiques et géométriques

Propriété:
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :
- *Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;*
- *Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Propriété:
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Pour connaître le comportement de la suite (u_n), il suffit de connaître le comportement de la suite définie par (q^n) :
- *Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$;*
- *Si $1 < q$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$;*
- *Si $< 1q < -1$ alors (q^n) n'a pas de limite.*