# Chapitre 1: Polynômes du second degré

## 1 Généralités sur les polynômes

**Définition:**
- *On appelle* ***monôme*** *de degré* ***n*** *toute fonction* $x \longmapsto ax^n$ *avec* $a \neq 0$ *;*
- *On appelle* ***polynôme*** *toute fonction* $P$ *somme de monomes ;*
- *Le* ***degré*** *d'un polynôme* $P$ *est le plus haut degré des monômes le constituant.*

**Exemples:**
*Toute fonction constante* $x \longmapsto k$ *avec* $k$ *réel est un polynôme.*
*Toute fonction affine* $x \longmapsto ax + b$ *avec* $a \neq 0$ *est un polynôme de premier degré ou polynôme de degré 1.*
*La fonction* $x \longmapsto 7x^3 + 4x^2 - 7$ *est un polynôme de degré 3.*

**Propriété:**
*Un polynôme de degré* $n$ *s'écrit de façon unique sous la forme* $x \longmapsto a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ *où* $a_n, ..., a_0$ *sont des réels appelés* ***coefficients*** *du polynôme.*

**Définition:**
*Soit* $P$ *un polynôme et* $a \in \mathbb{R}$*. Si* $P(a) = 0$*, on dit que* $a$ *est une racine de* $P$*.*

## 2 polynômes du second degré

Dans cette partie, on s'intéresse plus particulièerment aux polynômes du second degré. Les polynômes du second degré sont des fonctions trinômes de la forme $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ avec $a$, $b$ et $c$ trois réels et $a \neq 0$.
Pour tous réel $x$,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \text{ et } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

donc :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on obtient $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

**Définition:**
*Le réel* $\Delta = b^2 - 4ac$ *est le* ***discriminant*** *du trinôme* $ax^2 + bx + c$*.*

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ *est la* ***forme canonique*** *du trinôme* $ax^2 + bx + c$*.*

## a) Equations du second degré

On cherche à résoudre l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$. L'existence de solutions de cette équation dépend du signe du discriminent.

$1^{er}$ cas : $\Delta > 0$

$\dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ donc $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$ax^2+bx+c=0$ équivaut donc à $a\left(x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$. L'équation a donc deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad et \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$2^{nd}$ cas : $\Delta = 0$

$ax^2+bx+c = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$

$ax^2+bx+c=0$ équivaut donc à $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$, l'équation admet une unique solution : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

$3^{eme}$ cas : $\Delta < 0$

$\dfrac{\Delta}{4a^2} < 0$ et $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} \geq -\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$. L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solutions.

## b) Inéquations du second degré

On s'intéresse à présent au signe du trinôme $ax^2+bx+c$.

$1^{er}$ cas : $\Delta > 0$

Pour tout réel $x$, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ où $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

On obtient le tableau de signe suivant (en supposant $x_1 < x_2$) :

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-x_1$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $x-x_2$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $a(x-x_1)(x-x_2)$ | *signe de a* | 0 | *signe de* $(-a)$ | 0 | *signe de a* | |

$2^{nd}$ cas : $\Delta = 0$

Pour tout réel $x$, $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$ où $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ donc $ax^2+bx+c$ est du signe de $a$, sauf pour $x = x_0$, où le trinôme s'annule.

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $a(x-x_0)^2$ | *signe de a* | 0 | *signe de a* | |

$3^{eme}$ cas : $\Delta < 0$

Pour tout réel $x$, $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ et :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2} > 0$$

donc $ax^2+bx+c$ est du signe de $a$.

## c) Fonctions trinômes

On s'intéresse maintenant aux variations de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a$, $b$ et $c$ trois réels et $a \neq 0$.
L'étude de cette fonction peut se faire à partir de la forme canonique :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Si $a > 0$ alors $f$ admet le tableau de variation suivant :

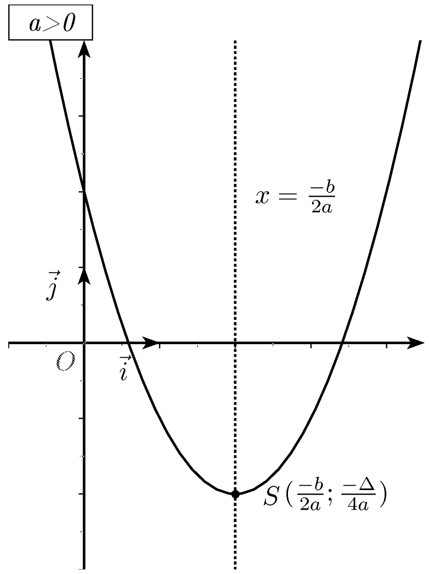
| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | $\nearrow$ | |

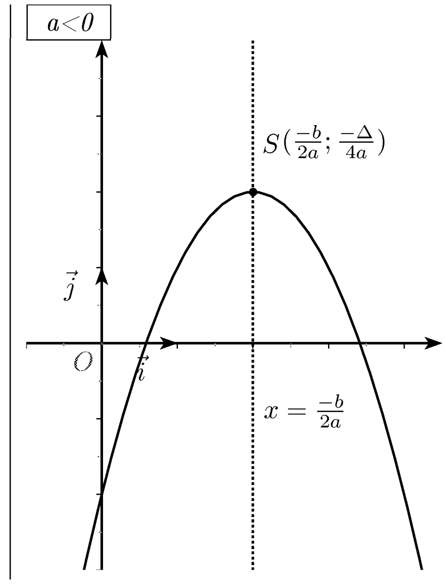
Si $a < 0$ alors $f$ admet le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | $\searrow$ | |

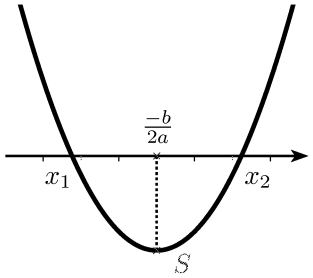
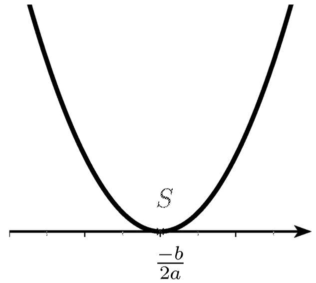
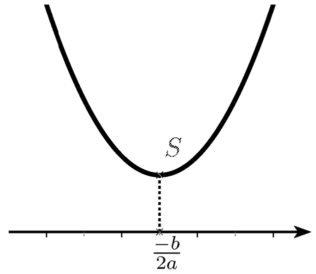
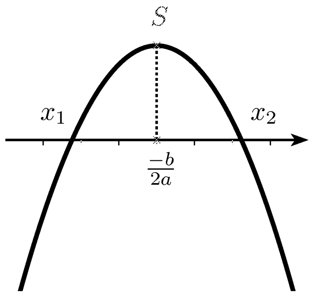
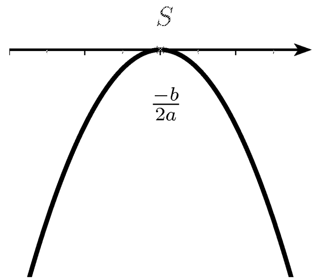
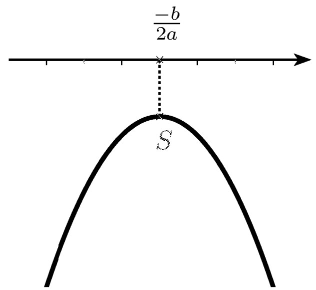
**Propriété:**
*La représentation graphique d'une fonction trinôme est une parabole ayant "les branches vers le haut" si $a > 0$ et ayant "les branches vers le bas" si $a < 0$.*
*On a $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ donc le sommet de cette parabole a pour coorodnnées $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$*

**Remarque:**
*Dans un repère orthogonal, la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ est un axe de symétrie de la parabole.*



## d) Tableau récapitulatif

| | $\Delta > 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta < 0$ |
|---|---|---|---|
| solution de l'équation<br>$ax^2+bx+c=0$ | $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ | $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ | pas de solutions |
| factorisation de l'expression $ax^2+bx+c$ | $a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ | $a\left(x-x_0\right)^2$ | aucune factorisation |
| $a > 0$ |  |  |  |
| $a < 0$ |  |  |  |
| signe du trinôme $ax^2+bx+c$ | $x$ : $-\infty$ $x_1$ $x_2$ $+\infty$<br>$f(x)$ : signe de $a$ 0 signe de $(-a)$ 0 signe $a$ | $x$ : $-\infty$ $x_0$ $+\infty$<br>$f(x)$ : signe de $a$ 0 signe de $a$ | $x$ : $-\infty$ $+\infty$<br>$f(x)$ : signe de $a$ |