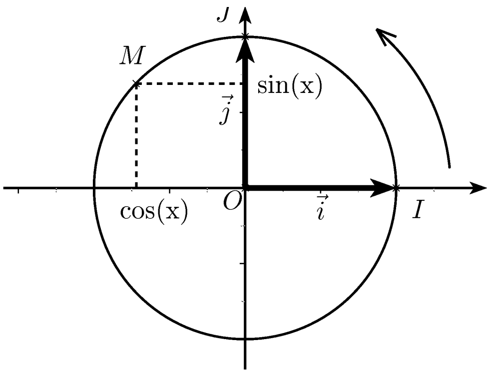
Chapitre 2: Angles orientés et repérage polaire

1 Le cercle trigonométrique

Définition:
Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, le cercle trigonométrique est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. Le sens trigonométrique, ou sens positif, est le sens inverse des aiguilles d'une montre.



Remarque:
Le cercle $\mathcal{C}$ a pour rayon 2π.

Soit $x \in \mathbb{R}$, en partant de I et en se placant sur $\mathcal{C}$, on parcourt un chemin de longueur $|x|$ en tournant :

Dans le sens positif si $x > 0$;

Dans le sens négatif si $x < 0$.

On aboutit ainsi à un point M du cerlce $\mathcal{C}$, associé de manière unique à x.

Définition:
La fonction cosinus, notée cos, est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x,

$$cos(x) = \textit{abscisse de } M(x)$$

La fonction sinus, notée sin, est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x,

$$sin(x) = \textit{ordonnée de } M(x)$$

Définition:
x est la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$.

Remarques:

Le radian est une unité de mesure d'angle proportionnelle au degré et 2π radians correspond à 360 degrés.

Propriété:
Pour tout réel x,

$$-1 \leq cos(x) \leq 1$$

$$-1 \leq sin(x) \leq 1$$

$$(cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1$$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

2 Angles orientés

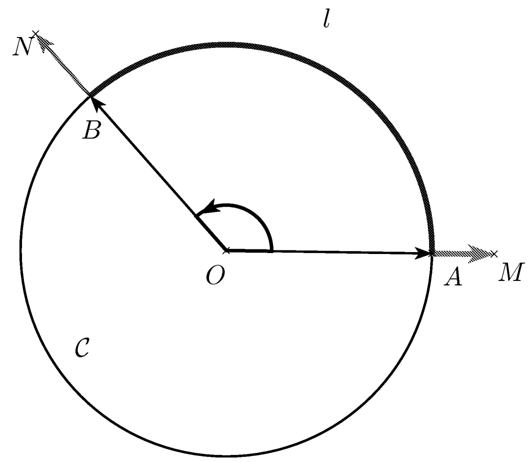
a) Définition des mesures

$\vec{u} = \vec{OM}$ et $\vec{v} = \vec{ON}$ sont deux vecteurs non-nuls.

Les demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ coupent le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O en A et B.

On associe au couple $(\vec{OA}, \vec{OB})$ une famille de nombre de la forme $l + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, où l est la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AB}$ $(l \geq O)$, parcouru de A vers B dans le sens direct.

Définition:
*Tous ces nombres sont une mesure en **radians** de l'angle orienté de vecteurs* $(\vec{u}, \vec{v})$.



Remarques:

- *On confond en général l'angle (notée* $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$*) et l'une de ses mesures (notée* $(\vec{u}, \vec{v})$*). On écrit :*

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3} \qquad ou \qquad (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}\ [mod\, 2\pi]$$

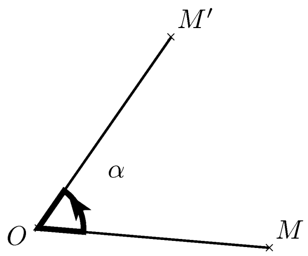
- *Si x est une mesure d'un angle orienté, toute autre mesure s'écrit $y = x + 2k\pi$.*
- *On dit que les mesures en radians sont définies à* $\boxed{2k\pi \text{ près}}$ *ou* $\boxed{\text{modulo } 2\pi}$.

b) Mesure principale

Propriété:
Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, il en existe une et une seule dans l'intervalle $I =]-\pi; \pi]$. Cette mesure est appelée mesure principale de l'angle orienté

Exemple: $\dfrac{43\pi}{3}$ *est une mesure d'un angle orienté.*
On a : $43\pi = \pi + 7 \times 6\pi$ *donc* $\dfrac{43\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 7 \times 2\pi$. *On en déduit que cet angle orienté a pour mesure principale* $\dfrac{\pi}{3}$.

c) Angles orientés et rotations



Définition:
O est un point fixe du plan et α un réel.
La rotation de centre O et d'angle α, mesurée en radians, est la transformation, notée $R_{(O;\alpha)}$, du plan orienté telle que O est invariant et pour tout point $M \neq O$, d'image M' :

$$OM = OM' \quad et \quad (\vec{OM}, \vec{OM'}) = \alpha$$

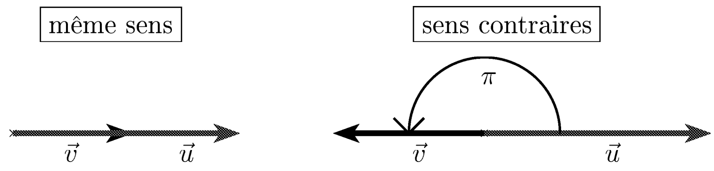
3 Propriétés des angles orientés

a) Angles et colinéarité

Théorème:
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$;

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

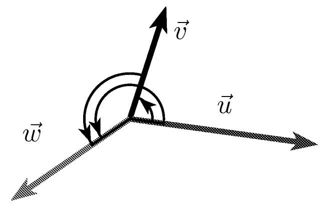


b) Relation de Chasles

Le théorème suivant, appelé **relation de Chasles** sera admis :

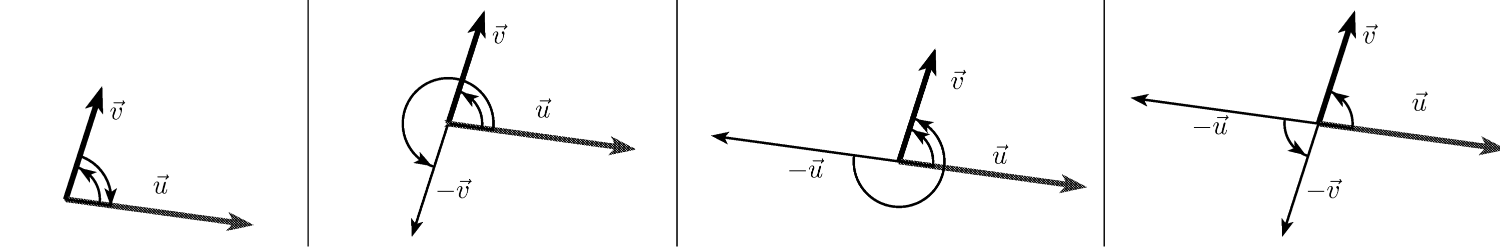
Théorème:
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) \quad (mod\, 2\pi)$$



Propriété:
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})\,(mod\, 2\pi)$ | $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi\,(mod\, 2\pi)$ | $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi\,(mod\, 2\pi)$ | $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})\,(mod\, 2\pi)$



4 Cosinus et sinus

x désigne la mesure en radians d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, toute autre mesure est de la forme $x + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi x et $x + 2k\pi$ sont associés au même point M donc :

$$cos(x + 2k\pi) = cos(x) \text{ et } sin(x + 2k\pi) = sin(x)$$

Les fonctions $x \longmapsto cos(x)$ et $x \longmapsto sin(x)$ sont périodiques de période 2π et on peut en déduire :

Définition:
Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté dont une mesure est le réel x, on a :

$$cos(\vec{u}, \vec{v}) = cos(x) \text{ et } sin(\vec{u}, \vec{v}) = sin(x)$$

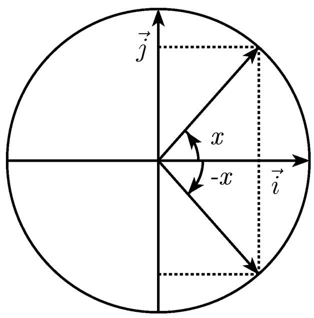
*Ainsi, le **cosinus** (respectivement le **sinus**) d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est le cosinus (respectivement le sinus) de l'une quelconque de ses mesures en radians.*

Propriété:
Pour des raisons de symétries, on obtient les résultats suivants :

Pour tout réel x,

$$cos(-x) = cos(x)$$

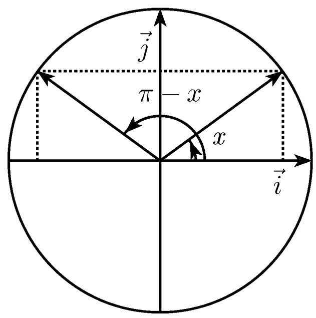
$$sin(-x) = sin(x)$$



Pour tout réel x,

$$cos(\pi - x) = -cos(x)$$

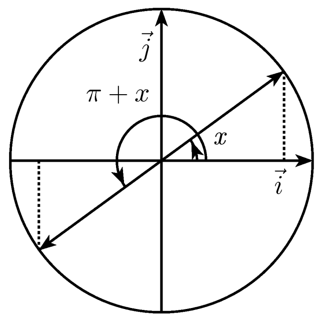
$$sin(\pi - x) = sin(x)$$



Pour tout réel x,

$$cos(\pi + x) = -cos(x)$$

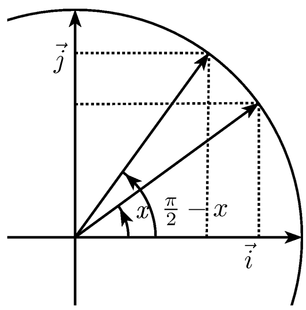
$$sin(\pi + x) = -sin(x)$$



Pour tout réel x,

$$cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x)$$

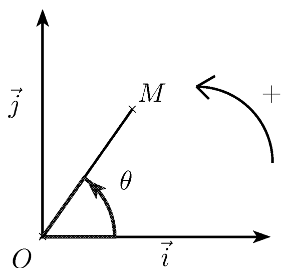
$$sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x)$$



5 Repérage et coordonnées polaires

a) Coordonnées polaires d'un point

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal direct.



Pour tout point M du plan, distinct de l'origine, on pose $r = OM$ et θ la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i},\vec{OM})$.

- Le couple $(r;\theta)$ ainsi défini est unique et il en découle que $r > 0$ et $\theta \in]-\pi;\pi]$.
- Réciproquement, à tout couple de réels $(r;\theta)$ tel que $r > 0$ et $\theta \in]-\pi;\pi]$ correspond un unique point M du plan.

Remarque:
La demi-droite $(O;\vec{i})$ est appelée demi-axe polaire.

Définition:
Pour tout point M du plan distinct de l'origine O, le couple $(r;\theta)$ tel que $r = OM$ et θ est la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i},\vec{OM})$ est le couple de coordonnées polaires de M relatif au demi-axe polaire $(O;\vec{i})$.

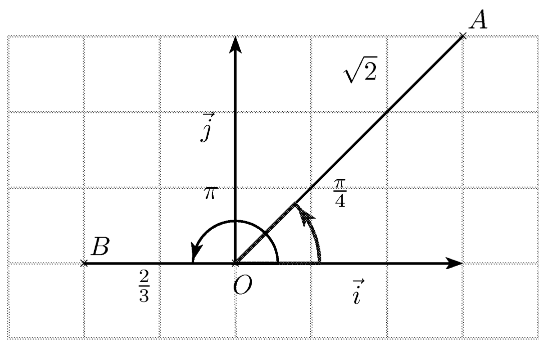
Exemple:
Sur la figure ci-dessous,

Si on considère le demi-axe polaire $(O;\vec{i})$, les coordonnées polaires des points A et B sont :

$$A\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right) \qquad et \qquad B\left(\frac{2}{3};\pi\right)$$

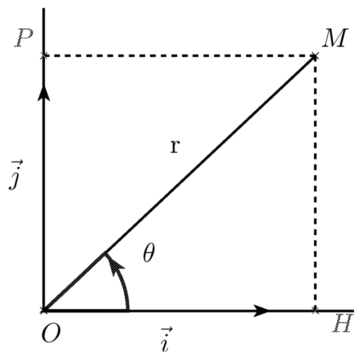
Si on considère le repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$, les coordonnées carthésiennes des points A et B sont :

$$A\left(1;1\right) \qquad et \qquad B\left(-\frac{2}{3};0\right)$$



b) Lien entre repérages cartésien et polaire

Dans un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$, un point M distinct de O a pour coordonnées cartésiennes $(x;y)$ et pour coordonnées polaires $(r;\theta)$ par rapport au demi-axe polaire $(O;\vec{i})$:



On observe ci-dessus que :

- $cos\theta = \dfrac{OH}{OM}$ donc $OH = rcos\theta$ d'où $x = rcos\theta$
- $sin\theta = \dfrac{HM}{OM}$ donc $HM = OP = rsin\theta$ d'où $y = rsin\theta$
- $OM^2 = OH^2 + OP^2$ donc $r^2 = x^2 + y^2$ et comme $r > 0$ on a : $r = \sqrt{x^2+y^2}$

Théorème:
Dans un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$, un point M distinct de O a pour coordonnées cartésiennes $(x;y)$ et pour coordonnées polaires $(r;\theta)$ par rapport au demi-axe polaire $(O;\vec{i})$, alors :

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad x = rcos(\theta) \quad ; \quad y = rsin(\theta)$$