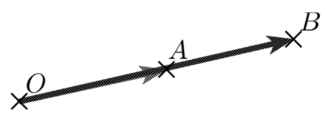
Chapitre 3: Produit scalaire

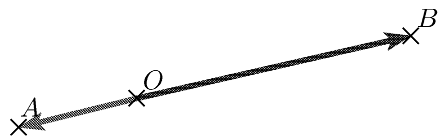
1 Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

Définition:
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non-nuls colinéaires tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$, notée $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, est le nombre réel défini de la façon suivante :

- *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = OA \times OB$:*



- *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposés, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -OA \times OB$:*



- *Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ on pose $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.*

Remarque:

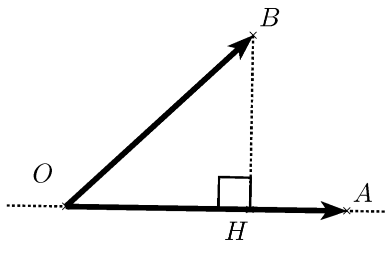
- *Le produit scalaire d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ par lui même, noté $\overrightarrow{u}^2$, est appelé le carré scalaire de $\overrightarrow{u}$.*
- *La norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$, noté $||\overrightarrow{u}||$, est la longueur de ce vecteur.*

2 Produit scalaire de deux vecteurs quelconques

Définition:
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non-nuls tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}$, où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).

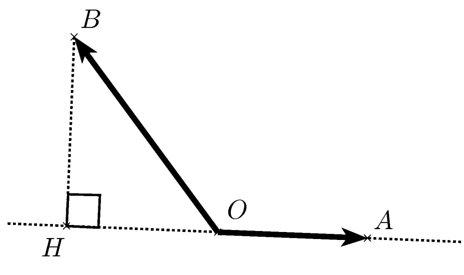
Pour $-\frac{\pi}{2} < (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) < \frac{\pi}{2}$:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = OA \times OH$$



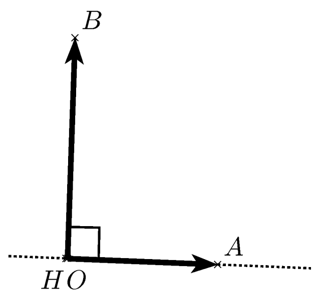
Pour $\frac{\pi}{2} < (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) < \frac{3\pi}{2}$:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -OA \times OH$$



Pour $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2}\,(mod\,\pi)$:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$$



3 Vecteurs orthogonaux

Définition:
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits orthogonaux si :

- *soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$;*
- *soit $(OA) \perp (OB)$ si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ sont non-nuls.*

Propriété:
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Démonstration:
Montrons les deux implications :

$\boxed{\Rightarrow}$
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux alors soit :

- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *ou* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$;
- $(OA) \perp (OB)$ *avec* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.

Dans les deux cas, on a bien $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ alors soit :

- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *ou* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ *et alors* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux.*
- $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ *et* $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ *avec* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ *alors* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OH}$ *où H est le projeté orthogonal de de B sur (OA).*
  $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OH}$ *sont colinéaires et* $\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{0}$ *donc* $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{0}$ *c'est à dire $H = O$ ainsi $(OA) \perp (OB)$ et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.*

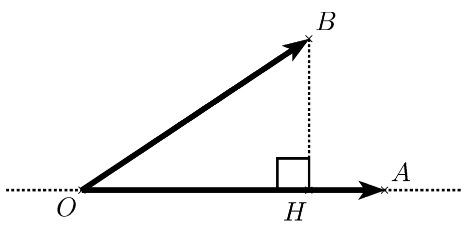
4 Produit scalaire, norme et cosinus

Propriété:
Pour tous vecteurs non-nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Démonstration:
- ***Premier cas de figure :*** $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2} \,(mod\, \pi)$, *on a immédiatement* $cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ *donc* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$

- ***Second cas de figure :*** $-\frac{\pi}{2} < (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) < \frac{\pi}{2}$

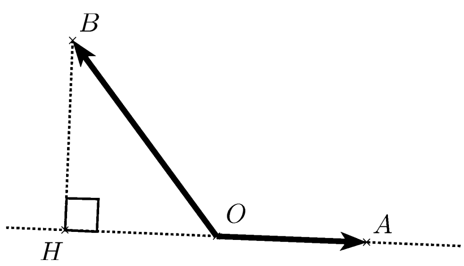


Posons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$. Le projeté orthogonal de H sur (OA) est tel que $\frac{OH}{OB} = cos\,\widehat{AOB}$ et :

- $OA = ||\overrightarrow{u}||$ *et* $OB = ||\overrightarrow{v}||$;
- $cos\,\widehat{AOB} = cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *donc* $OH = OB \times cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = ||\overrightarrow{v}|| \times cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Conclusion : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = OA \times OH = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

- ***troisième cas de figure :***



Posons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$. Le projeté orthogonal de H sur (OA) est tel que $\frac{OH}{OB} = cos\,\widehat{BOH}$ et :

- $OA = ||\overrightarrow{u}||$ *et* $OB = ||\overrightarrow{v}||$;
- $cos\,\widehat{BOH} = cos[\pi - (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})] = - - cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *donc* $OH = -OB \times cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -||\overrightarrow{v}|| \times cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

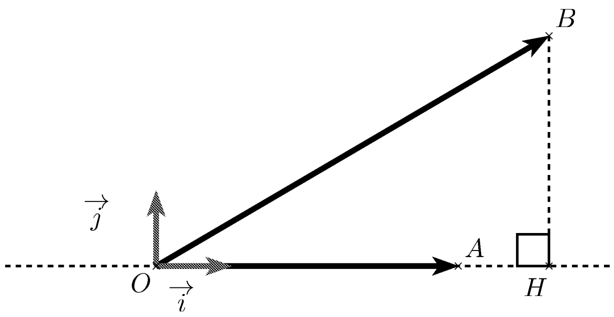
Conclusion : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -OA \times OH = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

5 Expression analytique du produit scalaire

Propriété:
Si deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *ont pour coordonnées respectives* $(x;y)$ *et* $(x';y')$ *dans un repère orthonormal, alors :*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Démonstration:
- *Si* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *(ou* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$*) alors* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0x' + 0y' = 0$ *donc la formule est vérifiée.*
- *Si* $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ *et* $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$*, on note* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$*.*
  On utilise le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *tel que* $\overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{OA}$ *sont colinéaires de même sens et* $()\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = \dfrac{\pi}{2}$*. Dans ce repère,*
  $$A(||\overrightarrow{u}||, 0) \quad et \quad B\,(||\overrightarrow{v}||cos\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}); ||\overrightarrow{v}||sin\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$$
  donc $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xx' + 0y' = xx' + yy'$



Remarque:
Si $\overrightarrow{u}(x;y)$ *alors :*
- $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = x^2 + y^2$
- $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

6 Propriété du produit scalaire

Propriété:
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *et tout réel* k *:*
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ *On dit que le produit scalaire est symétrique.*
- $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ *et* $(k\,\overrightarrow{u})\,\overrightarrow{v} = k\,(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$ *On dit que le produit scalaire est linéaire.*

7 Produit scalaire et distance

Notations :
Soit A et B deux points du plan tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, alors :
- $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$
- $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$