Chapitre 4: Applications du produit scalaire

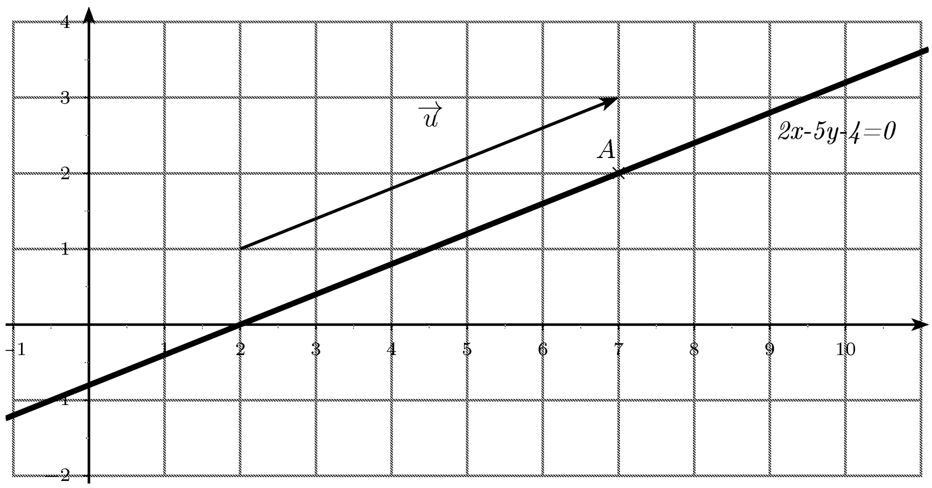
1 Produit scalaire et équation de droite

Théorème:
Dans un repère quelconque du plan,

- *Toute droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.*
- *Le vecteur $\overrightarrow{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur.*

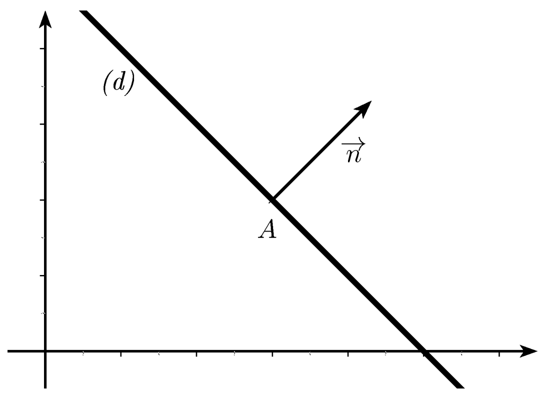
Exemple:
Le point $A(7; 2)$ appartient à la droite d'équation $2x - 5y - 4 = 0$, de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(5; 2)$. En effet,

$$2 \times 7 - 5 \times 2 - 4 = 0$$



L'équation réduite de cette droite est $y = \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$.

Définition:
Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est ***normal*** *à une droite (d) si $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ et que la direction de $\overrightarrow{n}$ est orthogonale à celle de la droite (d).*



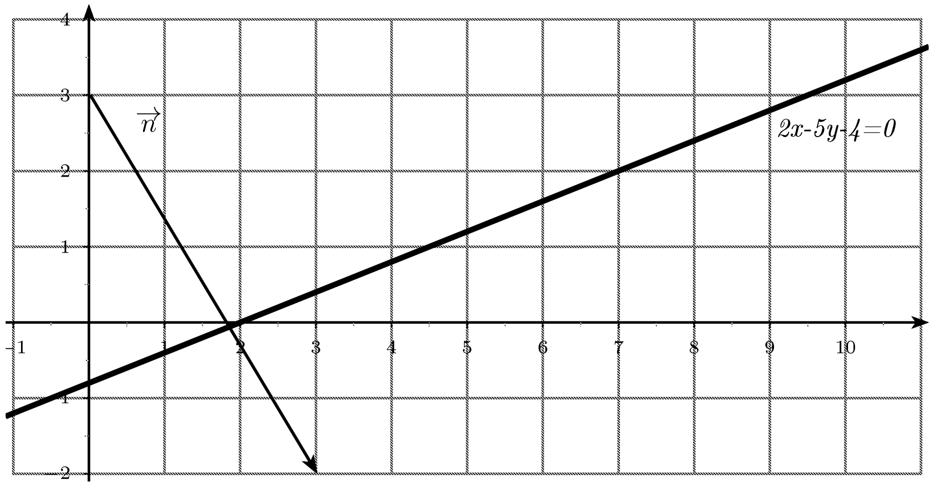
Remarque:
Un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ d'une droite (d) est orthogonal à tout vecteur directeur de (d). Si A est un point de la droite (d), alors la droite (d) est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

Théorème:
Dans un repère orthonormal,

- *Si* (d) *est une droite qui a une équation de la forme* $ax + by + c = 0$, $(a; b) \neq (0; 0)$ *alors le vecteur* $\overrightarrow{n}(a; b)$ *est un vecteur normal à* (d)
- *Si un vecteur non-nul* $\overrightarrow{n}(a; b)$ *est normal à* (d) *alors* (d) *a une équation de la forme* $ax + by + c = 0$.

Exemple:
Dans l'exemple précédent, le vecteur $\overrightarrow{n}(2; -5)$ *est un vecteur normal à la droite d'équation* $2x - 5y - 4 = 0$.



Démonstration:
$\Rightarrow$
D'après le théorème précédent, $\overrightarrow{u}(-b; a)$ *est un vecteur directeur de* (d) *et* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = -b \times a + a \times b = 0$ *donc* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{n}$ *sont orthogonaux.*
$\Leftarrow$
D'après la remarque précédente, (d) *est l'ensemble des points* $M(x; y)$ *tels que* $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. *On pose* $A(x_A; y_A)$, *on obtient :*

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)a + (x - y_A)b = 0 \Leftrightarrow ax + by + (-ax_A - by_A) = 0$$

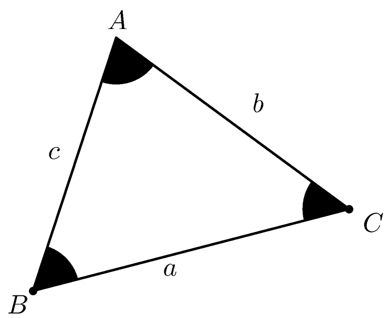
Conclusion : (d) *a une équation de la forme* $ax + by + c = 0$ *avec* $c = -ax_A - by_A$.

Théorème:
Dans un repère orthonormal, les droites (d) *et* (d') *ont pour équation respectives* $ax + by + c = 0$ *et* $a'x + b'y + c' = 0$.

$$(d) \text{ et } (d') \text{ sont perpendiculaires si et seulement si } aa' + bb' = 0$$

2 Produit scalaire et triangle

Formule d'Al Kashi

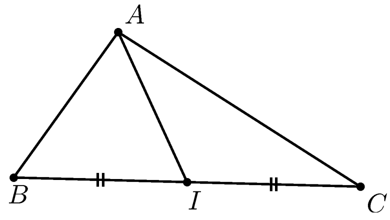


Théorème:
Dans le triangle ABC ci-dessus, on a :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$

Démonstration:
En exercice...

Théorème de la médiane



Théorème:
ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$, alors :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

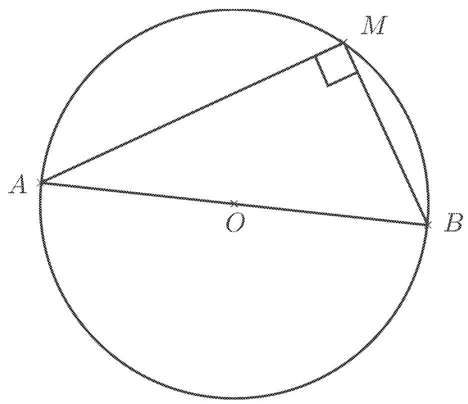
Démonstration:
En exercice...

3 Produit scalaire et cercle

Théorème:
Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$

Démonstration:
$\mathcal{C}$ est le cerce de centre O et de diamètre $[AB]$.

- *Le cercle $\mathcal{C}$ privé des points A et B est l'ensemble des points M tels que AMB est un triangle rectangle en M d'où $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.*
- *Si M est en A ou en B, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.*



Propriété:
Dans un repère orthonormal,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

est une équation du cercle $\mathcal{C}$ de rayon r et de centre $I(a;b)$.

Démonstration:
En exercice...

4 Produit scalaire et trigonométrie

Théorème:
Pour tous réels a et b :

- $cos\,(a-b) = cos\,a\,cos\,b + sin\,a\,sin\,b$
- $cos\,(a+b) = cos\,a\,cos\,b - sin\,a\,sin\,b$
- $sin\,(a-b) = sin\,a\,cos\,b - cos\,a\,sin\,b$
- $sin\,(a+b) = sin\,a\,cos\,b + cos\,a\,sin\,b$

Démonstration:
En exercice...

Théorème:
Pour tous réels a et b :

- $cos\,2a = cos^2\,a - sin^2\,a = 2cos^2\,a - 1 = 1 - 2sin^2\,a$
- $sin\,2a = 2sin\,a\,cos\,a$

Démonstration:
En exercice...