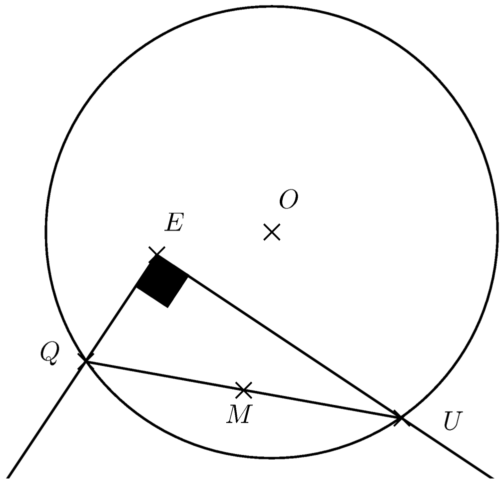
Équerre dans un cercle



On considère :

- un rapporteur, schématisé par un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon quelconque fixé ;
- une équerre, fixée en un point E, intérieur au cercle $(\mathcal{C})$ et représenté par deux demi-droites perpendiculaires qui interceptent le cercle $(\mathcal{C})$ en deux points Q et U ;
- M le milieu du segment $[QU]$.

L'objectif de cette étude est de faire apparaitre le lieu du point M lorsque cette équerre tourne sur le rapporteur autour du point E.

A. Construction et conjecture

a. Tracer le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 5.

b. Placer un point E à l'intérieur du cercle $(\mathcal{C})$ puis un point Q sur le cercle $(\mathcal{C})$ et tracer la demi-droite $[EQ)$.

c. Placer le point U, intersection du cercle $(\mathcal{C})$ et de la perpendiculaire à (EQ) passant par E.

d. Tracer le segment $[QU]$ puis placer son milieu M dont on affichera la trace.

e. En déplaçant Q, déterminer quel semble être le lieu du point M.

B. Démonstrations

1. a. Démontrer la propriété suivante :

   Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de son hypoténuse.

   b. Démontrer que OMQ est un triangle rectangle en M.

   c. En déduire que $ME^2 + MO^2 = OQ^2$.

2. On nomme I le milieu du segment $[EO]$.

   a. Démontrer que :

$$MO^2 + ME^2 = 2MI^2 + \frac{EO^2}{2}$$

   b. En déduire que le point M appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Quel est le lieu du point M ?