Chapitre 5: Dérivation

1 Nombre dérivé et tangente

a) Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition:
f est une fonction définie sur un intervalle I, a et $a+h$ sont deux nombres réels de I avec $h \neq 0$.
Dire que f est dérivable en a signifie que lorsque h tend vers 0, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel L, ce que l'on écrit :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$

Ce réel L est appelé le nombre dérivée de f en a et on le note $f'(a)$.

Exemple:
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$. On va démontrer que f est dérivable en -1 et déterminer de même le nombre dérivée en -1.

Pour tout réel $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} &= \frac{2\,(-1+h)^2 - 5\,(-1+h) + 4 - \left[2(-1)^2 - 5(-1) + 4\right]}{h} \\ &= \frac{2h^2 - 9h}{h} \\ &= 2h - 9 \end{aligned}$$

Si h tend vers 0, alors $2h-9$ tend vers -9 et

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = -9$$

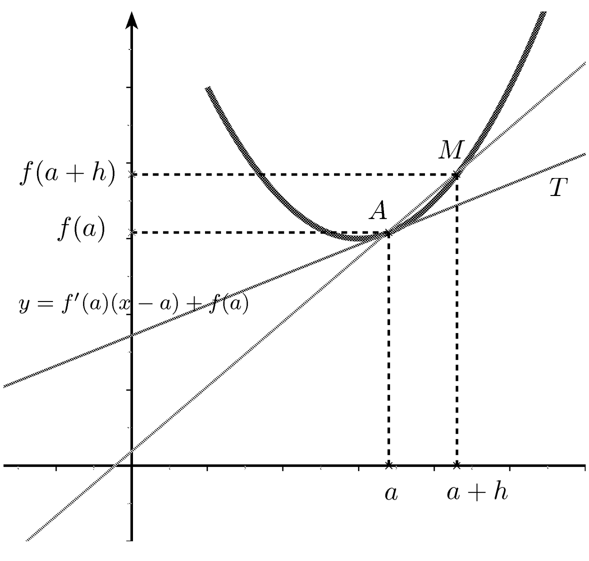
***Conclusion :** f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -9$.*

b) Tangente à la courbe d'une fonction

f est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel a de I.

$\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative dans le repère ci-dessous, A et M sont les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses a et $a+h$ avec $h \neq 0$.
Le coefficient directeur de la droite (AM) est

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Lorsque h tend vers 0, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel $f'(a)$ et géométriquement la droite (AM) a pour position limite la droite T qui passe par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Définition:
f est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel a de I.
Dans un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a est la droite qui passe par A et de coefficient directeur $f'(a)$. L'équation réduite de cette tangente est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

2 Fonction dérivée

Définition:
f est une fonction définie sur un intervalle I.

Dire que f est dérivable sur I signifie que f est dérivable en tout réel de I.

La fonction dérivée de f est le fonction qui à tout réel x associe $f'(x)$. Cette fonction est notée f'.

3 Dérivées des fonctions usuelles

Propriété: (fonction trinôme)
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2ax + b$.

Propriété: (fonction puissance)
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^\star$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = nx^{n-1}$.

Propriété: (fonction inverse)
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Propriété: (fonction racine carré)
f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Propriété: (fonctions trigonométriques)
Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $sin'(x) = cos(x)$ et $cos'(x) = -sin(x)$.

4 Opérations sur les dérivées

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Théorème:
- *La fonction λu où λ est une constante réel, est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$.*
- *La fonction $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.*
- *La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.*

Conséquence :
Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

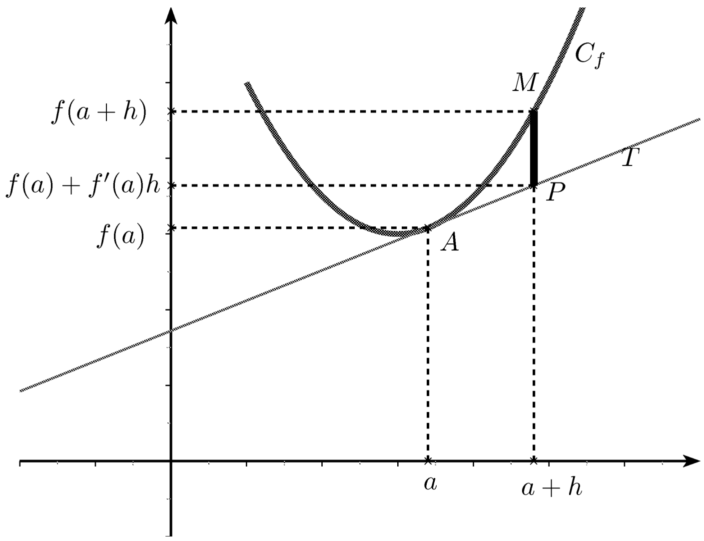
Théorème:
Si pour tout réel x de I, $v'(x) \neq 0$, alors :

- *$\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.*
- *$\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.*

Conséquence :
Toute fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est dérivable sur son domaine de définition.

Théorème: (admis)
Soit a et b deux réels, $a \neq 0$.
f est une fonction dérivable sur un intervalle I. J est l'intervalle formé des réels x tels que $ax + b$ appartient à I.
La fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur J et $g'(x) = a \times f'(ax + b)$

5 Approximation affine



C_f est la courbe représentative d'une fonction f qui est dérivable en a et T est la tangente à C_f au point $A(a; f(a))$.

Comme la tangente semble proche de la courbe autour du point A, les valeurs prises par la fonction affine associée à la tangente sont proches des valeurs prises par la fonction f autour de a. On peut remplacer $f(x)$ par $f'(a)(x-a)+f(a)$ pour x voisin de a ou en écrivant $x = a+h$, $f(a+h)$ par $f'(a)h+f(a)$ pour h voisin de 0.

On réalise ainsi une approximation affine de la fonction f au voisinage de a, c'est à dire qu'on remplace $f(x)$ par la fonction affine $f'(a)(x-a)+f(a)$.

On admettra que cette approximation affine est la "meilleure" dans le sens où l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par la fonction affine $f'(a)(x-a)+f(a)$ est la plus petite possible.