

Opérations sur les dérivés

A) Produit par un scalaire

u est une fonction dérivable sur I et λ un nombre réel donné.

1. Exprimer pour tout réel a de I , $(\lambda u)(a + h)$ où h est un réel non-nul.
2. Exprimer pour tout réel a , de I

$$\frac{(\lambda u)(a + h) - (\lambda u)(a)}{h}$$

où h est un réel non-nul.

3. En déduire que u est dérivable sur I et déterminer sa fonction dérivée.

B) Somme

u et v sont deux fonctions dérivables sur I .

1. Exprimer pour tout réel a de I , $(u + v)(a + h)$ où h est un réel non-nul.
2. Exprimer pour tout réel a de I ,

$$\frac{(u + v)(a + h) - (u + v)(a)}{h}$$

où h est un réel non-nul.

3. En déduire que $u + v$ est dérivable sur I et déterminer sa fonction dérivée.

C) Produit

u et v sont deux fonctions dérivables sur I .

1. Exprimer pour tout réel a de I , $(u \cdot v)(a + h)$ où h est un réel non-nul.
2. Montrer que pour tout réel a de I ,

$$\frac{(u \cdot v)(a + h) - (u \cdot v)(a)}{h} = \frac{u(a + h) - u(a)}{h} \cdot v(a) + u(a + h) \cdot \frac{v(a + h) - v(a)}{h}$$

où h est un réel non-nul.

3. En déduire que $u \cdot v$ est dérivable sur I et déterminer sa fonction dérivée.

D) Inverse

v est une fonction dérivable sur I qui ne s'annule pas sur I .

1. Exprimer pour tout réel a de I , $\left(\frac{1}{v}\right)(a + h)$ où h est un réel non-nul.
2. Montrer pour tout réel a de I ,

$$\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(a + h) - \left(\frac{1}{v}\right)(a)}{h} = -\frac{v(a + h) - v(a)}{h} \cdot \frac{1}{v(a + h)v(a)}$$

où h est un réel non-nul.

3. En déduire que $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et déterminer sa fonction dérivée.

E) Quotient

u et v sont deux fonctions dérivables sur I tel que v ne s'annule pas sur I .

1. Exprimer $\frac{u}{v}$ comme produit de deux fonctions.
2. En déduire que $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et déterminer sa fonction dérivée.