Chapitre 6: Barycentres

1 Barycentre de deux points pondérés

Propriété:
A et B sont deux points, a et b sont deux réels tels que $a+b\neq 0$. Il existe un unique point G tel que :

$$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$$

Démonstration:

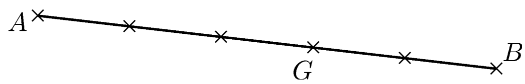
$$\begin{array}{rcrcl} a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} & \Leftrightarrow & a\overrightarrow{GA}+b\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right) & = & \overrightarrow{0} \\ & \Leftrightarrow & (a+b)\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{AB} & = & \overrightarrow{0} \\ & \Leftrightarrow & -(a+b)\overrightarrow{AG} & = & -b\overrightarrow{AB} \qquad et \quad a+b\neq 0 \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{AG} & = & \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} \end{array}$$

Le réel $\dfrac{b}{a+b}$ et les points A et B sont données donc il existe un unique point G vérifiant l'égalité $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$.

Définition:
Le point G est appelé barycentre des points pondérées (A,a) et (B,b).

Exemple:
Soit G le barycentre des points pondérées $(A,2)$ et $(B,3)$. On a d'après ce qui précède :

$$2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$



Propriété:
Si G est le barycentre des points pondérées (A,a) et (B,b) avec $a+b\neq 0$, alors pour tout réel $k\neq 0$, G est le barycentre des points pondérées (A,ka) et (B,kb)

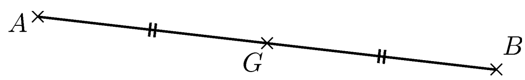
Démonstration:

$$\begin{array}{rcl} a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} & \Leftrightarrow & k\left(a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}\right)=k\,\overrightarrow{0} \\ & \Leftrightarrow & ka\overrightarrow{GA}+kb\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} \end{array}$$

Propriété:
L'isobarycentre de deux points est le barycentre de (A,a) et (B,a) avec $a\in\mathbb{R}^\star$. Ce point est le milieu du segment $[AB]$.

Démonstration:
Soit G l'isobarycentre des points pondérées (A,a) et (B,a). On a d'après ce qui précède :

$$a\overrightarrow{GA}+a\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$$



Propriété:
Si G est le barycentre de (A,a) et (B,b) avec $a+b\neq 0$, alors pour tout point M :

$$a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$$

Démonstration:
Pour tout point M du plan,

$$\begin{array}{rcl} a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB} & = & a\overrightarrow{MG}+a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{MG}+b\overrightarrow{GB} \quad et \qquad a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} \\ a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB} & = & (a+b)\overrightarrow{MG} \end{array}$$

Propriété:
Dans un repère $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ *du plan, on considère les points* $A(x_A;y_A)$ *et* $B(x_B;y_B)$. *Le barycentre* $G(x_G;y_G)$ *de* (A,a) *et* (B,b) *avec* $a+b\neq 0$ *a pour coordonnées :*
$$\left(\frac{ax_A+bx_B}{a+b};\frac{ay_A+by_B}{a+b}\right)$$

Démonstration:
G est le barycentre de (A,a) *et* (B,b) *avec* $a+b\neq 0$ *donc :*

$$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}=(a+b)\overrightarrow{OG}\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}$$

De plus $\overrightarrow{OA}(x_A;y_A)$ *et* $\overrightarrow{OB}(x_B;y_B)$ *donc :*

$$\overrightarrow{OG}\left(\frac{ax_A+bx_B}{a+b};\frac{ay_A+by_B}{a+b}\right)\qquad \text{soit}\qquad G\left(\frac{ax_A+bx_B}{a+b};\frac{ay_A+by_B}{a+b}\right)$$

2 Barycentre de trois points pondérés

Propriété:
(A,a), (B,b) *et* (C,c) *sont trois points pondérés tels que* $a+b+c\neq 0$. *Il existe un unique point* G *tel que :*

$$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

Démonstration:

$$\begin{array}{rcrcll}
a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} & \Leftrightarrow & a\overrightarrow{GA}+b\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+c\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right) & = & \overrightarrow{0} & \\
 & \Leftrightarrow & (a+b+c)\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC} & = & \overrightarrow{0} & \\
 & \Leftrightarrow & -(a+b+c)\overrightarrow{AG} & = & -b\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{AC} & \text{et}\quad a+b+c\neq 0\\
 & \Leftrightarrow & \overrightarrow{AG} & = & \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC} &
\end{array}$$

Les réels a, b et c ainsi que les points A, B et C sont données donc il existe un unique point G vérifiant l'égalité $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

Définition:
Le point G est appelé barycentre des points pondérées (A,a), (B,b) *et* (C,c).

Propriété:
Si G est le barycentre des points pondérées (A,a), (B,b) *et* (C,c) *avec* $a+b+c\neq 0$, *alors pour tout réel* $k\neq 0$, *G est le barycentre des points pondérées* (A,ka), (B,kb) *et* (C,kc).

Démonstration:
C'est la même démonstration que pour deux points pondérés !

Propriété: (associativité du barycentre)
Si G est le barycentre des points pondérées (A,a), (B,b) *et* (C,c) *avec* $a+b+c\neq 0$ *et si H est le barycentre des points pondérées* (A,a) *et* (B,b) *alors G est le barycentre des points pondérées* $(H,a+b)$ *et* (C,c).

Démonstration:
$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ *donc*

$$(a+b)\overrightarrow{GH}+a\overrightarrow{HA}+b\overrightarrow{HB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

Or H est le barycentre des points pondérées (A,a) *et* (B,b) *d'où*

$$a\overrightarrow{HA}+b\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{0}$$

donc :

$$(a+b)\overrightarrow{GH}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

Conclusion : *G est le barycentre des points pondérées* $(H,a+b)$ *et* (C,c)

Propriété:
L'isobarycentre de trois points est le barycentre de (A,a), (B,a) *et* (C,a) *avec* $a\in\mathbb{R}^\star$. *Ce point est le centre de gravité du triangle ABC.*

Propriété:
Si G est le barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c) avec $a+b+c \neq 0$, alors pour tout point M :

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$$

Démonstration:
Là encore, c'est la même démonstration que pour deux points pondérés !

Propriété:
Dans un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan, on considère les points $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$. Le barycentre $G(x_G;y_G)$ de (A,a), (B,b) et (C,c) avec $a+b+c \neq 0$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$$

Démonstration:
G est le barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c) avec $a+b+c \neq 0$ donc :

$$a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = (a+b+c)\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$$

De plus $\overrightarrow{OA}(x_A;y_A)$, $\overrightarrow{OB}(x_B;y_B)$ et $\overrightarrow{OC}(x_C;y_C)$ donc :

$$\overrightarrow{OG}\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right) \qquad \textit{soit} \qquad G\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$$