Chapitre 7: Applications de la dérivation

1 Signe de la dérivée et variations

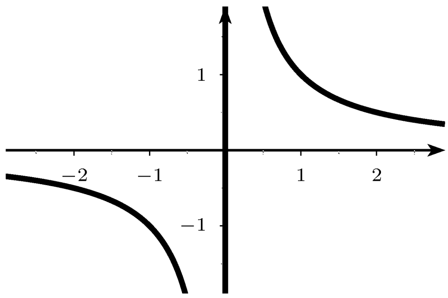
a) Du sens de variation au signe de la dérivée

Théorème:
f est une fonction dérivable sur un intervalle I :
- *si f est croissante sur I alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$.*
- *si f est décroissante sur I alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$.*
- *si f est constante sur I alors pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.*

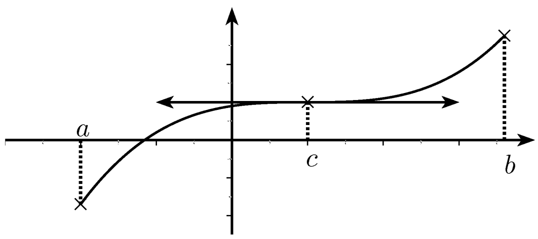
b) Du signe de la dérivée au sens de variation

Théorème: (admis)
f est une fonction dérivable sur un intervalle I :
- *si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I.*
- *si pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.*
- *si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.*

Remarques:
- *L'énoncé de ce théorème n'est plus vrai si l'on remplace « intervalle »par « réunion d'intervalles ».*
  En effet, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et
  $$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
  donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ mais f n'est pas décroissante sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ puisque $f(-1) < f(1)$



- *Une fonction croissante sur I $\boxed{\text{ou}}$ décroissante I est dite **monotone** sur I.*
- *Si $f'(x) > 0$ pour tout réel x de $I = [a; b]$ ou*
  *$f'(x) \geq 0$ pour tout réel x de $I = [a; b]$ mais ne s'annule qu'en un nombre fini de points de l'intervalle $I = [a; b]$ alors on dit que f est **strictement** croissante.*



  *Dans l'exemple ci-dessus, $f'(x)$ ne s'annule qu'en $x = c$, f est alors **strictement** croissante sur l'intervalle $I = [a; b]$.*
- *On définit de manière analogue une fonction **strictement** décroissante sur l'intervalle $I = [a; b]$.*

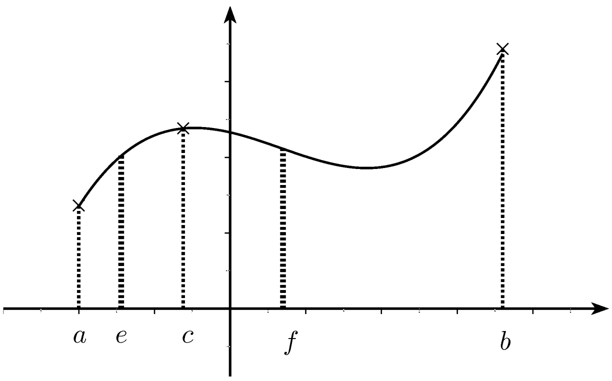
2 Extremum

a) Extremum local

Définition:
f est une fonction définie sur un intervalle I et c est un réel de I.

- *$f(c)$ est un maximum local s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant c tel que pour tout réel x de J,*

$$f(x) \leq f(c)$$



Ici, $f(c)$ est un maximum local puisque pour tout réel $x \in]e; f[$, $f(x) \leq f(c)$.

- *$f(c)$ est un minimum local s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant c tel que pour tout réel x de J,*

$$f(x) \geq f(c)$$

- *$f(c)$ est un extremum local si $f(c)$ est un maximum local ou un minimum local.*

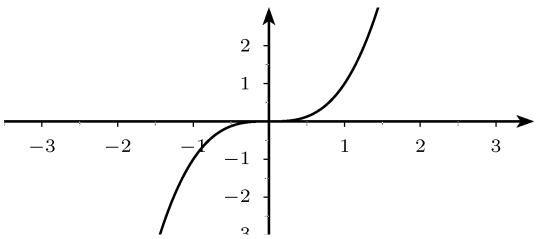
Théorème: (admis)
*f est une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et c est un réel de I.*

$$\text{Si } f(c) \text{ est un extremum local de } f \text{ alors } f'(c) = 0$$

Remarque:
La réciproque de ce théorème est fausse. En effet, la fonction $f : x \longmapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 3x^2$$

donc $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ d'où f est croissante sur $\mathbb{R}$.

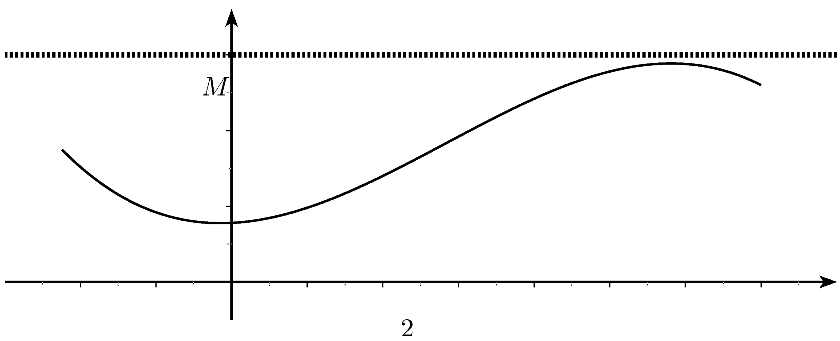


Or $f'(0) = 0$ et $f(0)$ n'est pas un extremum local de f.

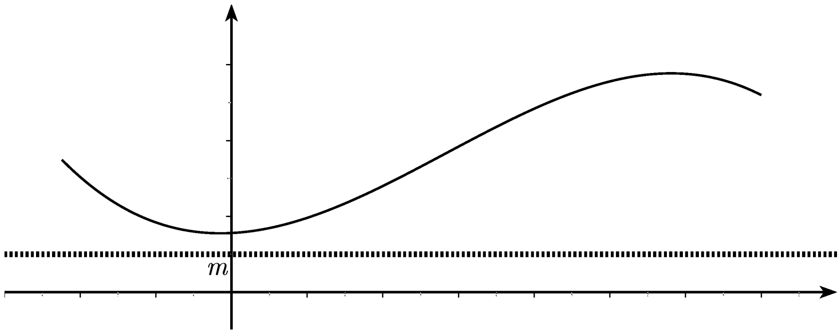
b) Majorant et minorant

Définition:
f est une fonction définie sur un intervalle I.

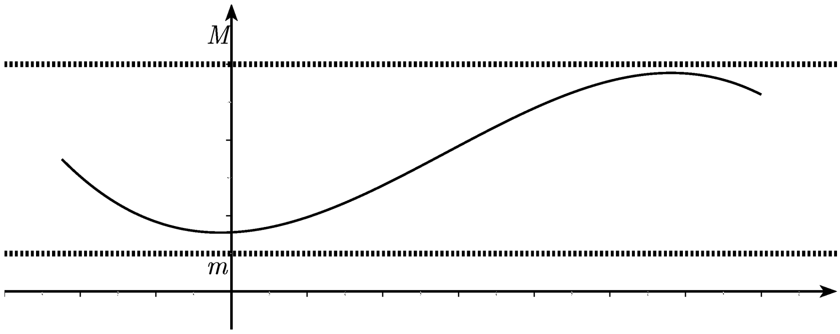
- *M est un majorant de f sur I si pour tout réel x de I, $f(x) \leq M$.*



- *m est un minorant de f sur I si pour tout réel x de I, $f(x) \geq m$.*



- *f est bornée sur I si f admet un majorant et un minorant.*



3 Équations $f(x) = 0$

Théorème: (admis)
f est une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$.

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.