

## Localiser une solution de $f(x)=0$

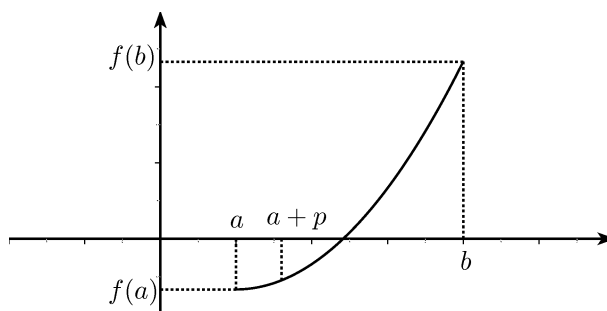
### Théorème:

Soit  $f$  une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle  $[a; b]$  tel que  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires. L'équation  $f(x) = 0$  admet alors une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[a; b]$ .

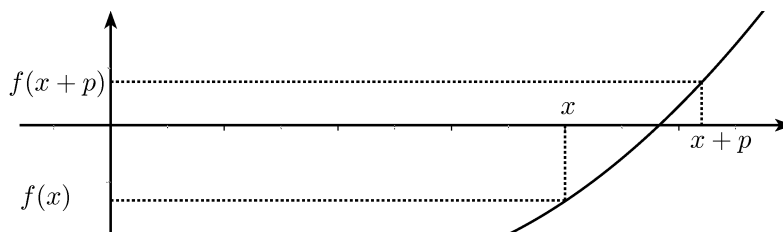
Le théorème ci-dessus donne l'existence d'un réel  $\alpha$  dans l'intervalle  $[a; b]$  tel que  $f(\alpha) = 0$  mais ne nous donne pas le moyen de trouver  $\alpha$  ou une valeur approchée de  $\alpha$ .

### A) Un premier algorithme

L'idée de cet algorithme est la suivante. On note  $p$  le pas qui correspondra à la précision obtenue pour l'encadrement de  $\alpha$  :



- on pose  $x = a$  pour commencer ;
- si  $f(x) \times f(x+p) > 0$  alors on remplace  $x$  par  $x+p$  et on regarde de nouveau le signe de  $f(x) \times f(x+p)$  ;
- si  $f(x) \times f(x+p) < 0$  alors on peut affirmer que  $x < \alpha \leq x+p$ .



1. Programmer l'algorithme ci-dessous à l'aide du logiciel Albox :

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><u>Variables :</u><br/> <math>a, p</math></p> <p><u>Algorithme :</u><br/>         Saisir <math>a</math><br/>         Saisir <math>p</math><br/>         Tant que <math>f(a) \times f(a+p) &gt; 0</math> faire<br/>             <math>a</math> reçoit <math>a+p</math><br/>         FinTant<br/>         Afficher <math>a</math><br/>         Afficher <math>a+p</math></p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

2. Prouver que l'équation  $x^3 - 2x^2 + 4x - 1 = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[0; 1]$ .
3. Trouver un encadrement d'amplitude  $10^{-4}$  de  $\alpha$ .
4. Prouver que l'équation  $x^2 - 3 = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[0; 2]$ .
5. Trouver un encadrement d'amplitude  $10^{-3}$  de  $\sqrt{3}$ .

## B) L'algorithme de dichotomie

1. Programmer l'algorithme ci-dessous à l'aide du logiciel Algobox :

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><u>Variables :</u><br/><math>a, b, p</math><br/><u>Algorithme :</u><br/>Saisir <math>a</math><br/>Saisir <math>b</math><br/>Saisir <math>p</math><br/>Tant que <math>b - a &gt; p</math> faire<br/>    Si <math>f(a) \times f((a + b)/2) &gt; 0</math><br/>        Alors <math>a</math> reçoit <math>(a + b)/2</math><br/>        Sinon <math>b</math> reçoit <math>(a + b)/2</math><br/>    FinSi<br/>FinTant<br/>Afficher <math>a</math><br/>Afficher <math>b</math></p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

2. Expliquer le fonctionnement de cet algorithme.
3. Trouver un encadrement d'amplitude  $10^{-4}$  de  $\alpha$ .
4. Trouver un encadrement d'amplitude  $10^{-3}$  de  $\sqrt{3}$ .