Variations d'une fonction dérivable

A) Du sens de variation au signe de la dérivée

1. Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^2 + 10x - 3$. Étudier les variations de f puis le signe de f'.

2. Soit g la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 6x + 2$. Étudier les variations de g puis le signe de g'.

3. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

4. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et croissante sur I.

   a. Pour tout réel x de I, étudier le signe de :

$$T(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \textit{pour} \qquad h \neq 0$$

   b. En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de I.

5. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et décroissante sur I. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de I.

6. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et constante sur I. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de I.

B) Du signe de la dérivée au sens de variation

1. Donner le théorème réciproque du théorème énoncé dans la partie 1.a. du cours.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$.
   a. Déterminer f' puis étudier son signe.
   b. En déduire les variations de f.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   a. Déterminer f' puis étudier son signe.
   b. En déduire les variations de f.
   c. Peut-on dire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^\star$?

C) Exercices

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 9x^2 + 5$

2. Étudier les variations de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{-2x+3}{x+4}$

3. Étudier les variations de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{x^2+3}{3x-1}$

4. Étudier les variations de la fonction $k : x \longmapsto -x^4 + 3x^3 - 2x^2$