L'essentiel du chapitre 8

1 Définition

On appelle suite numérique une liste infinie ordonnée de nombres réels.

2 Variations

Définition:

Une suite (u_n) est strictement croissante si pour tout entier naturel n , $u_n < u_{n+1}$

Une suite (u_n) est strictement décroissante si pour tout entier naturel n , $u_n > u_{n+1}$

Une suite (u_n) est constante si pour tout entier naturel n , $u_n = u_{n+1}$

Remarques:

• Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) :

→ On regarde les premiers termes ;

→ Pour tout entier n , on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou on compare le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

Théorème:

La suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$ avec f définie sur $[0; +\infty[$.

• Si f est croissante sur $[0; +\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante.

• Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$ alors la suite (u_n) est décroissante.

3 Suites arithmétiques

On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est constante, autrement dit s'il existe un réel r tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + r$. Ce réel r est appelé la raison de la suite arithmétique.

Théorème:

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$

Propriété:

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

• Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.

• Si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante et si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Théorème:

La somme des $(n + 1)$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison r est donnée par :

$$S_n = \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

4 Suites géométriques

On dit qu'une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = qu_n$. Ce réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

Théorème:

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 q^n$

Propriété:

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q :

• Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante ;

• Si $q < 0$, la suite (u_n) n'est pas monotone ;

• Si $1 < q$, la suite (u_n) est strictement croissante et si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Théorème:

La somme des $(n + 1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q est donnée par :

$$S_n = \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$