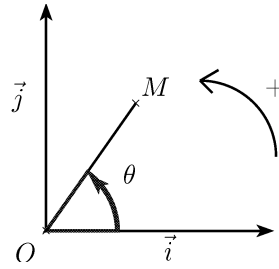


1 Coordonnées polaires d'un point

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct.



Pour tout point M du plan, distinct de l'origine, on pose $r = OM$ et θ la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i}, O\vec{M})$.

- Le couple $(r; \theta)$ ainsi défini est unique et il en découle que $r > 0$ et $\theta \in]-\pi; \pi]$.
- Réciproquement, à tout couple de réels $(r; \theta)$ tel que $r > 0$ et $\theta \in]-\pi; \pi]$ correspond un unique point M du plan.

Remarque:

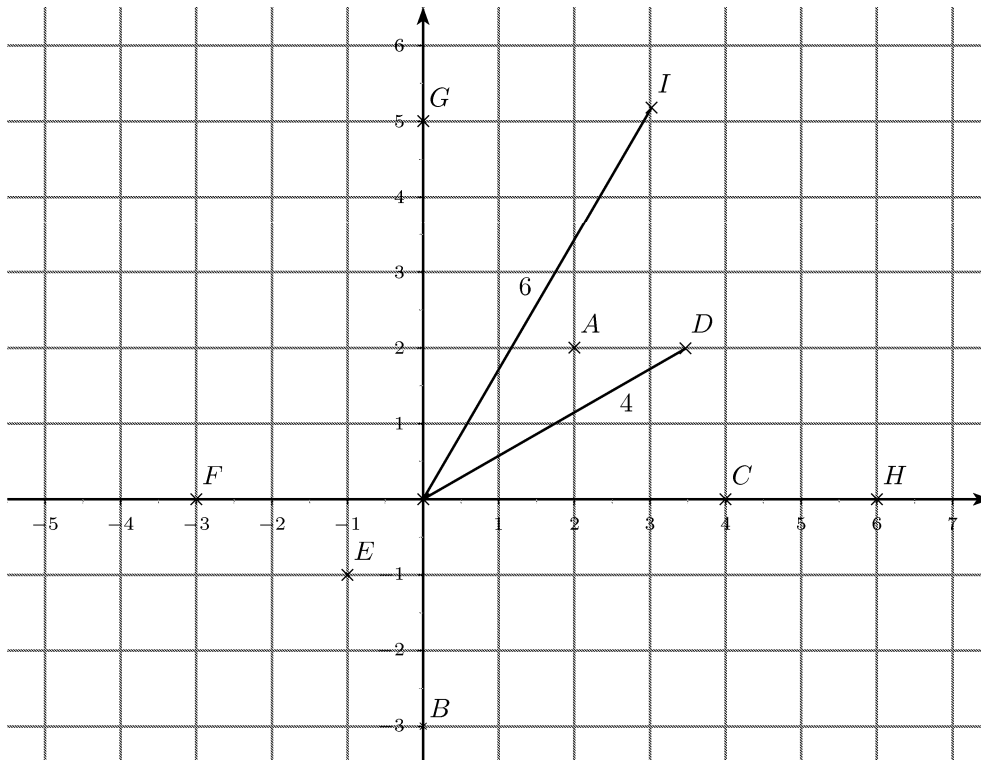
La demi-droite $(O; \vec{i})$ est appelée *demi-axe polaire*.

Définition:

Pour tout point M du plan distinct de l'origine O , le couple $(r; \theta)$ tel que $r = OM$ et θ est la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i}, O\vec{M})$ est le couple de *coordonnées polaires* de M relatif au demi-axe polaire $(O; \vec{i})$.

Exercice 1:

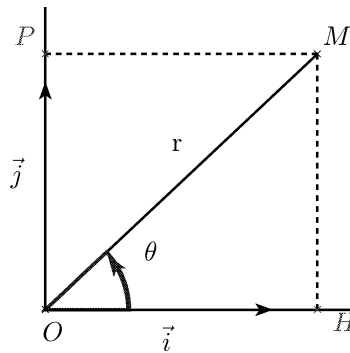
Pour chacun des points ci-dessous, déterminer ses coordonnées polaires dans le repère $(O; \vec{i})$ et ses coordonnées cartésiennes dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:



Placer les points $M_1\left(2; -\frac{\pi}{6}\right)$, $M_2(2; \pi)$, $M_3\left(\sqrt{5}; \frac{2\pi}{3}\right)$ et $M_4\left(\sqrt{7}; \frac{5\pi}{6}\right)$.

2 Lien entre repérages cartésien et polaire

Dans un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, un point M distinct de O a pour coordonnées cartésiennes $(x; y)$ et pour coordonnées polaires $(r; \theta)$ par rapport au demi-axe polaire $(O; \vec{i})$:



On observe ci-dessus que :

- $\cos\theta = \dots\dots\dots$ donc $OH = \dots\dots\dots$ d'où $x = \dots\dots\dots$
- $\sin\theta = \dots\dots\dots$ donc $HM = \dots\dots\dots$ d'où $y = \dots\dots\dots$
- $OM^2 = \dots\dots\dots$ donc $r^2 = \dots\dots\dots$ et comme $r > 0$ on a : $r = \dots\dots\dots$

Théorème:

Dans un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, un point M distinct de O a pour coordonnées cartésiennes $(x; y)$ et pour coordonnées polaires $(r; \theta)$ par rapport au demi-axe polaire $(O; \vec{i})$, alors :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad x = r\cos(\theta) \quad ; \quad y = r\sin(\theta)$$

Exercice 2:

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a : $A(2; 0)$, $B(1; \sqrt{3})$, $C(-\sqrt{6}; \sqrt{2})$ et $D(0; -3)$. Déterminer leurs coordonnées polaires dans le repère $(O; \vec{i})$.

Exercice 3:

Dans le repère polaire $(O; \vec{i})$, on a : $A(1; \pi)$, $B\left(5; -\frac{2\pi}{3}\right)$, $C\left(\sqrt{8}; \frac{3\pi}{4}\right)$ et $D\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$. Déterminer leurs coordonnées cartésiennes dans le repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 4:

On considère les points A de coordonnées polaires $(2; 0)$; B image de A dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et I le milieu de $[AB]$.

1. Placer les points A , B et I dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$
2. a. Déterminer les coordonnées cartésiennes de A .
b. Déterminer les coordonnées polaires de B . En déduire ses coordonnées cartésiennes.
c. En déduire que I a pour coordonnées cartésiennes $\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
3. a. Déterminer la nature du triangle OAB .
b. Montrer que $(\vec{OA}, \vec{OI}) = \frac{3\pi}{8}$.
c. En déduire les coordonnées polaires du point I .
d. En déduire que $\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ et $\sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$