Chapitre 10: Variables aléatoires

1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Exemple:
Un joueur lance deux fois une pièce équilibrée ; il gagne 2 euros par « pile »obtenu et perd 1 euro par « face »obtenu. On modélise l'expérience grâce à l'univers $\Omega = \{2P\ ;\ 1F1P\ \ 2F\}$ *et la loi de probabilité :*

Issue	$2P$	$1F1P$	$2F$
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On définit une fonction X *sur* Ω *qui, à chaque issue, associe le gain algébrique correspondant du joueur. Une telle fonction est appelée* ***variable aléatoire*** *sur* Ω. *La variable aléatoire* X *associe aux issues* $2P$, $1F1P$ *et* $2F$ *les réels respectifs* 4, 1 *et* -2.
On note $P(X = 4)$ *la probabilité que le gain soit égal à* 4 *c'est à dire la probabilité que le résultat soit* $2F$ *soit* $P(X = 4) = P(2F) = \frac{1}{4}$.

Définition:
- *Définir une variable aléatoire* X *sur* Ω *c'est associer un réel à chaque issue de* Ω.
- *Si* $\{x_1\ ;\ x_2\ ;\ ...\ ;\ x_r\}$ *sont les valeurs prises par* X *sur* Ω *alors :*
  - *l'événement « X prend la valeur x_i »est notée « $X = x_i$ » ;*
  - *sa probabilité $P(X = x_i)$ est la probabilité de l'ensemble des issues ayant x_i pour image par X ;*
  - *on note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X soit $X(\Omega) = \{x_1\ ;\ x_2\ ;\ ...\ ;\ x_r\}$.*

Définition:
Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, *c'est :*
- *préciser l'ensemble des valeurs $X(\Omega) = \{x_1\ ;\ ...\ ;\ x_r\}$ prises par X ;*
- *calculer, pour chaque valeur x_i, la probabilité $P(X = x_i)$.*

Exemple:
Dans l'exemple précédent, $X(\Omega) = \{-2; 1; 4\}$ *et la loi de probabilité de la variable aléatoire* X *est donnée par le tableau ci-dessous :*

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2 Espérance, variance et écart-type

Définition:
Soit X une variable aléatoire, de loi de probabilité donnée par :

x_i	x_1	x_2	...	x_r
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_r

- *L'espérance de X est le réel $E(X)$ défini par*

$$E(X) = p_1x_1 + ... + p_rx_r = \sum_{i=1}^{r} p_ix_i.$$

- *La variance de X est le réel $V(X)$ défini par*

$$V(X) = \sum_{i=1}^{r} p_i(x_i - E(X))^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} p_ix_i^2\right) - (E(X))^2.$$

- *L'écart-type de X est le réel $\sigma(X)$ défini par*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple:
Dans l'exemple précédent, on a :

- $E(X) = \sum_{i=1}^{3} p_ix_i = \frac{1}{4} \times (-2) + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 4 = 1.$
- $V(X) = \left(\sum_{i=1}^{3} p_ix_i^2\right) - (E(X))^2 = \frac{1}{4} \times (-2)^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{4} \times 4^2 - 1^2 = 4,5.$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 2,1.$

Définition:
Si X est une variable aléatoire et a et b sont deux nombres réels, on peut définir la variable aléatoire $aX + b$ en associant à chaque issue donnant x_i le nombre $ax_i + b$.

Propriété:
X est une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. Pour tous nombres réels a et b,

$$E(aX + b) = aE(x) + b \text{ et } V(aX + b) = a^2V(X).$$