Suites arithmétiques et suites géométriques

A) Suites arithmétiques

Définition:
On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est constante, autrement dit s'il existe un réel r tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + r$. Ce réel r est appelé la raison de la suite arithmétique.

Exercice 1:
Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?
1. (u_n) est la suite de terme général $u_n = -4n + 5$.
2. (v_n) est la suite de terme général $v_n = (n-1)^2 + n^2$.
3. (w_n) est la suite de terme général $w_n = (2n-1)^2 - 4n^2$.

Exercice 2:
Montrer que si (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors :

$$u_n = u_0 + rn$$

Exercice 3:
Déterminer les variations d'une suite arithmétique en fonction de la valeur de sa raison r.

Exercice 4:
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 5$.
1. Déterminer u_n en fonction de n.
2. En déduire u_{25}.
3. Déterminer les variations de (u_n) .
4. Représenter graphiquement cette suite dans un repère orthonormée du plan.
5. Étudier de même la suite arithmétique (v_n) de raison 2 et de premier terme $u_0 = -3$.

Exercice 5:
Déterminer la raison et le premier terme u_0 d'une suite arithmétique tel que $u_5 = \dfrac{1}{3}$ et $u_9 = 4$.

Exercice 6:
On note la somme des 10 premiers entiers par $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} i$
1. a. Calculer cette somme.
   b. En regroupant les termes de cette somme par 2 donner une autre façon de calculer la somme des 10 premiers entiers.
   c. Calculer la somme des 11 premiers entiers.
   d. En déduire une expression de la somme des n premiers entiers en fonction de n.
   e. Vérifier votre résultat sur plusieurs exemples.
   f. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{1000} i$
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
   a. Exprimer u_n en fonction de n, r et u_0.
   b. Montrer que la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Exercice 7:
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 4$. Déterminer S_{25}.

Exercice 8:
Calculer : $S = 5 + 10 + 15 + \cdots + 1005$

Exercice 9:
Déterminer la raison et le premier terme u_0 d'une suite arithmétique tel que $S_5 = 100$ et $S_9 = 172$.

B) Suite géométrique

Définition:
On dit qu'une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = qu_n$. Ce réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

Exercice 10:
Les suites suivantes sont-elles géométriques ?

1. (u_n) est la suite de terme général $u_n = 8^n$.
2. (v_n) est la suite de terme général $v_n = n^2 + n$.
3. (w_n) est la suite de terme général $w_n = \dfrac{2}{3^n}$.

Exercice 11:
Montrer que si (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors :

$$u_n = u_0 q^n$$

Exercice 12:
Déterminer les variations d'une suite géométrique en fonction de la valeur de sa raison q.

Exercice 13:
Soit (u_n) une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 10$.

1. Déterminer u_n en fonction de n.
2. En déduire u_{10}.
3. Déterminer les variations de (u_n) .
4. Représenter graphiquement cette suite dans un repère orthonormée du plan.
5. Étudier de même la suite géométrique (v_n) de raison 2 et de premier terme $u_0 = 8$.

Exercice 14:
Déterminer la raison et le premier terme u_0 d'une suite géométrique tel que $u_5 = 9$ et $u_7 = 4$.

Exercice 15:

1. Montrer que pour tout réel q et pour tout entier n,

$$(1-q)\left(1+q+q^2+...+q^n\right) = 1-q^{n+1}$$

2. En déduire que pour tout réel $q \neq 1$ et pour tout entier n,

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = 1+q+q^2+...+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

3. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Exprimer u_n en fonction de n, q et u_0.
4. Montrer que la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique est donnée par la formule ci-dessous :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exercice 16:
Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 8$. Déterminer S_{25}.

Exercice 17:
Calculer : $S = 3 + 6 + 12 + \cdots + 196608$

Exercice 18:
Calculer : $S = 1 + 5 + 25 + \cdots + 390625$