

Chapitre 11: Suites

1 Définition

Définition:

On appelle suite numérique une liste infinie ordonnée de nombres réels.

Exemple:

La suite des inverse des entiers naturels-non nuls :

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$$

Remarques:

- Une suite est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou tout simplement (u_n) .
- Le terme d'indice n est noté u_n , on l'appelle le terme général de la suite (u_n) .
- Il ne faut pas confondre la suite (u_n) et le terme général de la suite u_n .

Exemple:

Dans l'exemple précédent, on a :

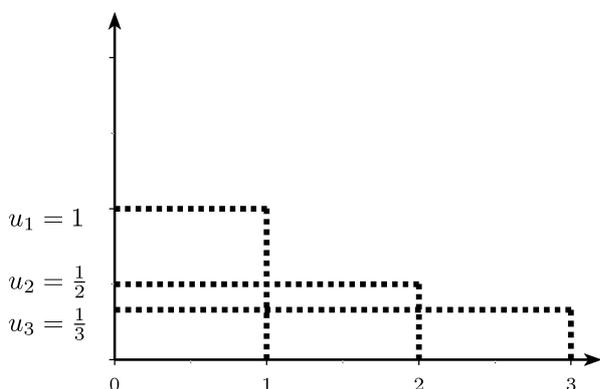
$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$$

On numérote les termes de cette suite à partir de 1.

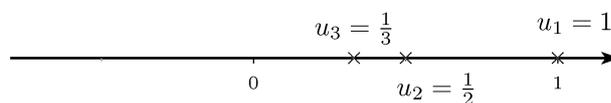
n	1	2	...	$n-1$	n	$n+1$...
u_n	$u_1 = 1$	$u_2 = \frac{1}{2}$...	$u_{n-1} = \frac{1}{n-1}$	$u_n = \frac{1}{n}$	$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$...

Il est important de ne pas confondre u_{n+1} le terme d'indice $(n+1)$ et $u_n + 1$ le terme d'indice n auquel on ajoute 1.

On dispose de deux procédés pour représenter une suite de terme général u_n :



Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on place les points de coordonnées $(n; u_n)$.



Sur un axe $(O; \vec{i})$, on place les points d'abscisses u_n .

2 Mode de génération

A) Par définition explicite du terme d'indice n

Si f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$, on peut définir une suite (u_n) en posant pour tout n , $u_n = f(n)$.

Exemples:

- $u_n = 7n - 6$, ici $f(x) = 7x - 6$.

- $u_n = \frac{1-n}{1+n^2}$, ici $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$.

B) Par récurrence

On donne le premier terme u_0 de la suite et une relation entre u_{n+1} et u_n qui permet de calculer les termes de la suite (u_n) les uns après les autres.

Exemple:

- $u_0 = 2$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = 5u_n + 1$
- $u_1 = 5u_0 + 1 = 11$, $u_2 = 56$, $u_3 = 281$, ...
- Dans cet exemple, on remarque que $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 5x + 1$.
- Pour déterminer u_{10} , il faut d'abord déterminer u_9 , u_8 , ...

3 Variations

Définition:

Une suite (u_n) est strictement croissante si pour tout entier naturel n ,

$$u_n < u_{n+1}$$

Une suite (u_n) est strictement décroissante si pour tout entier naturel n ,

$$u_n > u_{n+1}$$

Une suite (u_n) est constante si pour tout entier naturel n ,

$$u_n = u_{n+1}$$

Remarques:

- On définit de même une suite croissante ou décroissante. Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.
- Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) :
 - On regarde les premiers termes;
 - Pour tout entier n , on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou on compare le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

Exemples:

- La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante, en effet :

$$u_0 = 1; u_1 = -1; u_2 = 1; u_3 = -1; \dots$$

- La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 3n$ est strictement croissante, en effet pour tout n :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - (n^2 + 3n) = 2n + 4 > 0$$

- La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{2^n}$ est strictement décroissante, en effet pour tout n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{donc} \quad u_{n+1} < u_n$$

Théorème:

La suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$ avec f définie sur $[0; +\infty[$.

- Si f est croissante sur $[0; +\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Remarque:

La réciproque est fautive !

4 Suites arithmétiques

Définition:

On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est constante, autrement dit s'il existe un réel r tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + r$. Ce réel r est appelé la raison de la suite arithmétique.

Exemples:

- La suite des entiers naturels pairs définie sur \mathbb{N} par $u_n = 2n$ est une suite arithmétique de raison 2 puisque :

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 2n = 2$$

- La suite des carrés des entiers naturels définie sur \mathbb{N} par $u_n = n^2$ n'est pas une suite arithmétique puisque :

$$u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1 \quad \text{et} \quad u_2 - u_1 = 4 - 1 = 3$$

Théorème:

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$

Propriété:

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

- Si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante ;
- Si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante ;
- Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.

5 Suites géométriques

Définition:

On dit qu'une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = qu_n$. Ce réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

Exemples:

- La suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2 puisque :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \quad \text{soit} \quad u_{n+1} = 2u_n$$

- La suite des carrés des entiers naturels non-nuls définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = n^2$ n'est pas une suite géométrique puisque :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{1} = 4 \quad \text{et} \quad \frac{u_3}{u_2} = \frac{9}{4} \neq 4$$

Théorème:

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tout entier naturel n , $u_n = u_0q^n$

Propriété:

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q :

- Si $1 < q$, la suite (u_n) est strictement croissante ;
- Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante ;
- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante ;
- Si $q < 0$, la suite (u_n) n'est pas monotone.

6 Sommes de termes

Théorème:

La somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison r est donnée par :

$$S_n = \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

Théorème:

La somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q est donnée par :

$$S_n = \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$