Chapitre 12: Loi binomiale

1 Loi de Bernoulli

Définition:
Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, l'une appelée succès (S) et l'autre échec $(\overline{S})$ avec $P(S) = p$ et $P\left(\overline{S}\right) = 1 - p$.

Exemple:
L'épreuve aléatoire : « on lance un dé cubique équilibré et on s'intéresse à la sortie d'un multiple de 3 »est une épreuve de Bernoulli de paramètre la probabilité du succès « obtenir un multiple de 3 »soit $p = P(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Propriété:
On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Soit X la v.a qui prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec. La loi de probabilité de X est :

k	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

L'espérance est $E(X) = p$ et la variance est $V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$. On dit que la variable aléatoire X suit ***loi de Bernoulli de paramètre*** *p.*

Démonstration:
$V(X) = P(X = 0)\,(0 - E(X))^2 + P(X = 1)\,(1 - E(X))^2 = p - p^2$.

2 Loi binomiale et coefficients binomiaux

Définition:
Lorsqu'on répète n fois la même expérience de Bernoulli de manière ***indépendante****, on obtient un schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p.*

Définition:
Le ***nombre de chemins*** *de l'arbre associé à un schéma de Bernoulli d'ordre n conduisant à k succès pour n répétitions est noté $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ». Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés coefficients binomiaux.*

Théorème:
Pour tous nombres entiers n et k :

- *Si $0 \leq k \leq n$ alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ où $n! = n \times (n-1)...2 \times 1$ et $0! = 1$.*
- *Si $0 \leq k \leq n$ alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;*
- *Si $0 \leq k \leq n - 1$ alors $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.*

Définition:
Dans un schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, la variable aléatoire X associant à chaque issue le nombre de succès a pour loi de probabilité :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \text{ avec } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

On dit que X suit une ***loi binomiale de paramètre*** *n* ***et*** *p. On note X suit $\mathcal{B}(n; p)$.*

Exemple:
On répète 10 *fois l'expérience précédente : c'est un schéma de Bernoulli de paramètres* 10 *et* $\frac{1}{3}$.
La variable aléatoire X *donnant le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres* $n = 10$ *et* $p = \frac{1}{3}$.
On en déduit donc que la probabilité d'obtenir exactement 2 *fois des nombres multiples de 3 lors de ces* 10 *lancers (c'est à dire la probabilité d'obtenir exactement* 2 *succès) est :*

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^8 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^8 \simeq 0{,}20.$$

Propriété:
Soit une variable aléatoire X *qui suit une loi binomiale de paramètres* n *et* p. *On a* $E(X) = np$; $V(X) = npq$ *et* $\sigma(X) = \sqrt{npq}$ *où* $q = 1 - p$.

3 Échantillonnage et prise de décision

Au sein d'une population, on suppose que la proportion d'un certain caractère est p. On souhaite juger cette hypothèse. Pour cela on prélève dans la population au hasard et avec remise, un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f de ce caractère.

Définition:
L'intervalle de fluctuation à 95% *d'une fréquence, sur un échantillon aléatoire de taille* n, *selon la loi binomiale de paramètres* n *et* p *est :*

$$\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$$

avec a *le plus petit entier tel que* $P(X \leq a) > 0,025$ *et* b *le plus petit entier tel que* $P(X \leq b) \geq 0,975$.

Règle:
- *Si* $f \in \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$, *l'hypothèse est acceptée au seuil de* 95% ;
- *Si* $f \notin \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$, *l'hypothèse est rejetée au seuil de* 5%.