

Les coefficients binomiaux

Définition:

On répète n fois la même expérience de Bernoulli de manière **indépendante**, on obtient un schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p .

Définition:

Le **nombre de chemins** de l'arbre associé à un schéma de Bernoulli d'ordre n conduisant à k succès pour n répétitions est noté $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ». Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés **coefficients binomiaux**.

Exercice 1:

Démontrer que pour tous nombres entiers n et k :

1. Si $0 \leq k \leq n$ alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
2. Si $0 \leq k \leq n-1$ alors $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (Formule de Pascal).

Exercice 2:

Le triangle de Pascal est représenté par le tableau ci-dessous, il permet de calculer les coefficients binomiaux de proche en proche en utilisant la formule de Pascal.

1. Pour tout entier n , déterminer $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{1}$.
2. Compléter le tableau ci-dessous :

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Théorème:

Si $0 \leq k \leq n$ alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ où $n! = n \times (n-1) \dots 2 \times 1$ et $0! = 1$.

Exercice 3:

A l'aide de la formule ci-dessus :

1. Déterminer le nombre de chemins conduisant à 7 succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre 12;
2. Déterminer le nombre de chemins conduisant à 6 succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre 12;
3. En déduire le nombre de chemins conduisant à 7 succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre 13.

Exercice 4:

On cherche à déterminer la somme suivante $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ pour tout entier n .

1. Déterminer le nombre de chemins de l'arbre associé à un schéma de Bernoulli d'ordre n .
2. Conclure.