

Chapitre 13: Comportement asymptotique d'une suite

1 Notion de convergence

Définition:

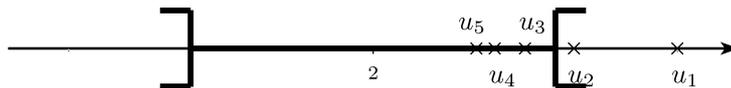
On dit que la suite (u_n) converge vers le réel a si tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes d'une suite à partir d'un certain rang. On écrit alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$$

Exemple:

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.

Soit $h > 0$ un nombre réel positif, tout intervalle de la forme $]2 - h; 2 + h[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang n_0 . Par exemple pour $h = 0,4$, tous les termes de la suite à partir du rang $n_0 = 3$ sont compris dans l'intervalle $]2 - 0,4; 2 + 0,4[=]1,6; 2,4[$.



On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 2.

Remarque:

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

2 Suite divergente

Définition:

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, où A est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Exemple:

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n^2$.

Soit $A > 0$ un nombre réel positif, tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang n_0 tel que $n_0 > \sqrt{A}$. En effet :

$$u_n > A \iff n^2 > A \iff n > \sqrt{A}$$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Définition:

Une suite (u_n) est dit divergente si elle n'est pas convergente vers un réel a .

Exemple:

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$.

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = -1 \quad ; \quad u_2 = 1 \quad ; \quad u_3 = -1 \quad ; \quad \dots$$

Cette suite est alternée, elle ne converge vers aucun réel mais n'a pas non plus pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.

Remarque:

Il y a deux type de suites divergentes :

- celle qui n'ont aucune limite ;
- celle qui ont pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.