

# Chapitre 1: Polynômes du second degré

## 1 Généralités sur les polynômes

### Définition:

- On appelle **monôme** de degré  $n$  toute fonction  $x \mapsto ax^n$  avec  $a \neq 0$  ;
- On appelle **polynôme** toute fonction  $P$  somme de monômes ;
- Le **degré** d'un polynôme  $P$  est le plus haut degré des monômes le constituant.

### Exemples:

Toute fonction constante  $x \mapsto k$  avec  $k$  réel est un polynôme.

Toute fonction affine  $x \mapsto ax + b$  avec  $a \neq 0$  est un polynôme de premier degré ou polynôme de degré 1.

La fonction  $x \mapsto 7x^3 + 4x^2 - 7$  est un polynôme de degré 3.

### Propriété:

Un polynôme de degré  $n$  s'écrit de façon unique sous la forme  $x \mapsto a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  où  $a_n, \dots, a_0$  sont des réels appelés **coefficients** du polynôme.

### Définition:

Soit  $P$  un polynôme et  $a \in \mathbb{R}$ . Si  $P(a) = 0$ , on dit que  $a$  est une racine de  $P$ .

## 2 Polynômes du second degré

Dans cette partie, on s'intéresse plus particulièrement aux polynômes du second degré. Les polynômes du second degré sont des fonctions trinômes de la forme  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  avec  $a, b$  et  $c$  trois réels et  $a \neq 0$ .

Pour tout réel  $x$ ,

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \text{ et } \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

donc :

$$ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

$$\text{On pose } \Delta = b^2 - 4ac \text{ et on obtient } ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

### Définition:

Le réel  $\Delta = b^2 - 4ac$  est le **discriminant** du trinôme  $ax^2 + bx + c$ .

$a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$  est la **forme canonique** du trinôme  $ax^2 + bx + c$ .

### a) Équations du second degré

On cherche à résoudre l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$ . L'existence de solutions de cette équation dépend du signe du discriminant.

1<sup>er</sup> cas :  $\Delta > 0$

$$\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \text{ donc } a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \right] = a \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$ax^2 + bx + c = 0$  équivaut donc à  $a \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$ . L'équation a donc deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dans ce cas, on obtient la factorisation :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

2<sup>nd</sup> cas :  $\Delta = 0$

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

$ax^2 + bx + c = 0$  équivaut donc à  $a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ , l'équation admet une unique solution :  $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Dans ce cas, on obtient la factorisation :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

3<sup>eme</sup> cas :  $\Delta < 0$

$\frac{\Delta}{4a^2} < 0$  et  $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$  donc  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ . L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  n'admet pas de solutions.

Dans ce cas, le polynôme  $ax^2 + bx + c$  n'admet pas de factorisation.

### b) Inéquations du second degré

On s'intéresse à présent au signe du trinôme  $ax^2 + bx + c$ .

1<sup>er</sup> cas :  $\Delta > 0$

Pour tout réel  $x$ ,  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  où  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

On obtient le tableau de signe suivant (en supposant  $x_1 < x_2$ ) :

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$x - x_1$		- 0 +		+
$x - x_2$		-	- 0 +	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		signe de $a$ 0	signe de $(-a)$ 0	signe de $a$

2<sup>nd</sup> cas :  $\Delta = 0$

Pour tout réel  $x$ ,  $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$  où  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  donc  $ax^2 + bx + c$  est du signe de  $a$ , sauf pour  $x = x_0$ , où le trinôme s'annule.

$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$a(x - x_0)^2$		signe de $a$ 0	signe de $a$

3<sup>eme</sup> cas :  $\Delta < 0$

Pour tout réel  $x$ ,  $ax^2 + bx + c = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$  et :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2} > 0$$

donc  $ax^2 + bx + c$  est du signe de  $a$ .

**c) Fonctions trinômes**

On s'intéresse maintenant aux variations de la fonction  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a, b$  et  $c$  trois réels et  $a \neq 0$ . L'étude de cette fonction peut se faire à partir de la forme canonique :

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Si  $a > 0$  alors  $f$  admet le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\swarrow$ $-\frac{\Delta}{4a}$ $\searrow$		

Si  $a < 0$  alors  $f$  admet le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$ $\frac{\Delta}{4a}$ $\searrow$		

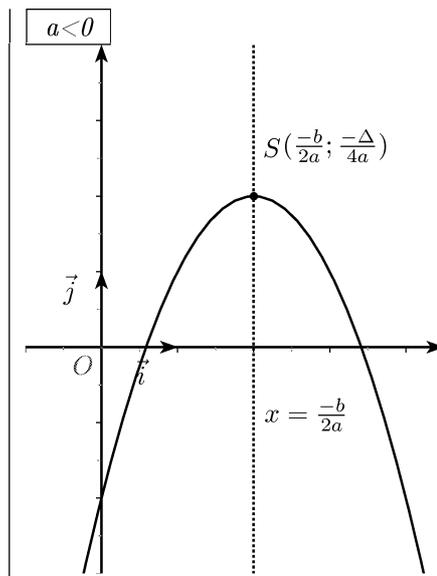
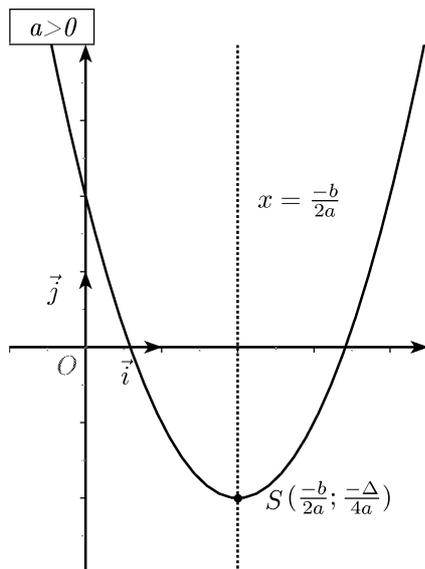
**Propriété:**

La représentation graphique d'une fonction trinôme est une parabole ayant "les branches vers le haut" si  $a > 0$  et ayant "les branches vers le bas" si  $a < 0$ .

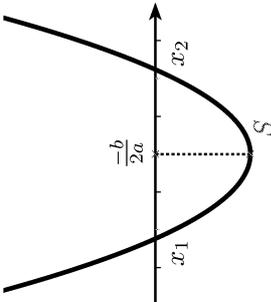
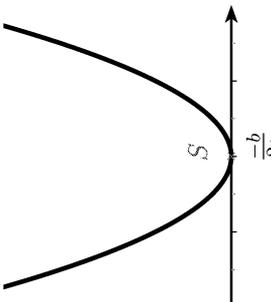
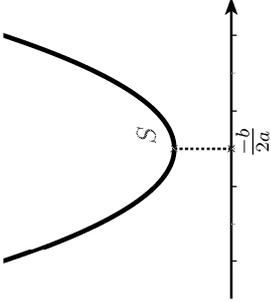
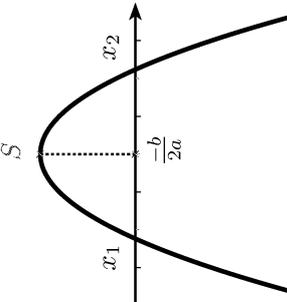
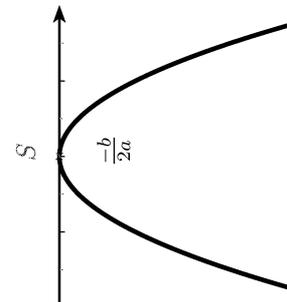
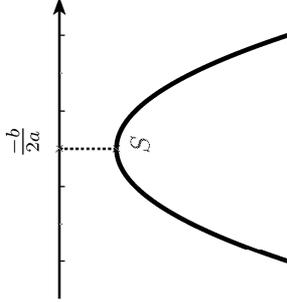
On a  $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$  donc le sommet de cette parabole a pour coordonnées  $S\left(\frac{-b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

**Remarque:**

Dans un repère orthogonal, la droite d'équation  $x = \frac{-b}{2a}$  est un axe de symétrie de la parabole.



d) Tableau récapitulatif

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$																								
solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = \frac{-b}{2a}$	pas de solutions																								
factorisation de l'expression $ax^2 + bx + c$ $a > 0$	$a(x - x_1)(x - x_2)$ 	$a(x - x_0)^2$ 	aucune factorisation 																								
$a < 0$																											
signe du trinôme $ax^2 + bx + c$	<table border="1" data-bbox="1053 1131 1157 1635"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>x_1</math></td> <td><math>x_2</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td>signe de <math>a</math></td> <td>0</td> <td>signe de <math>(-a)</math></td> <td>signe de <math>a</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	$f(x)$	signe de $a$	0	signe de $(-a)$	signe de $a$	<table border="1" data-bbox="1053 660 1157 1108"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>x_0</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td>signe de <math>a</math></td> <td>0</td> <td>signe de <math>a</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$	$f(x)$	signe de $a$	0	signe de $a$	<table border="1" data-bbox="1053 235 1157 638"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td>signe de <math>a</math></td> <td>signe de <math>a</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	signe de $a$	signe de $a$
$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$																							
$f(x)$	signe de $a$	0	signe de $(-a)$	signe de $a$																							
$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$																								
$f(x)$	signe de $a$	0	signe de $a$																								
$x$	$-\infty$	$+\infty$																									
$f(x)$	signe de $a$	signe de $a$																									