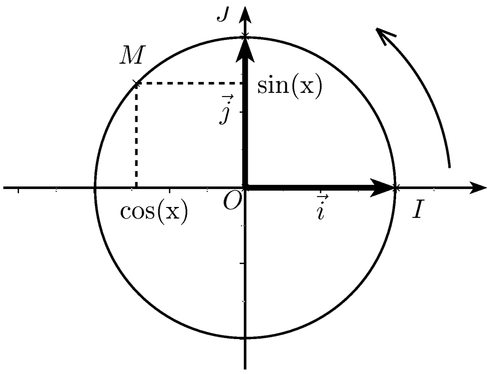
Chapitre 3: Angles orientés

1 Le cercle trigonométrique

Définition:
Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, le cercle trigonométrique est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. Le sens trigonométrique, ou sens positif, est le sens inverse des aiguilles d'une montre.



Remarque:
Le cercle $\mathcal{C}$ a pour rayon 2π.

Soit $x \in \mathbb{R}$, en partant de I et en se plaçant sur $\mathcal{C}$, on parcourt un chemin de longueur $|x|$ en tournant :

Dans le sens positif si $x > 0$;

Dans le sens négatif si $x < 0$.

On aboutit ainsi à un point M du cercle $\mathcal{C}$, associé de manière unique à x.

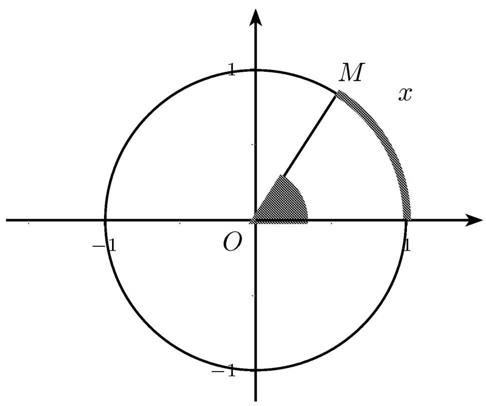
Définition:
La fonction cosinus, notée cos, est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x,

$$cos(x) = abscisse\ de\ M(x)$$

La fonction sinus, notée sin, est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x,

$$sin(x) = ordonnée\ de\ M(x)$$

Définition:
On dit que x est la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$.



Remarque:
Le radian est une unité de mesure d'angle proportionnelle au degré et 2π radians correspond à 360 degrés.

Propriété:
Pour tout réel x,

$$-1 \leq cos(x) \leq 1$$
$$-1 \leq sin(x) \leq 1$$
$$(cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1$$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

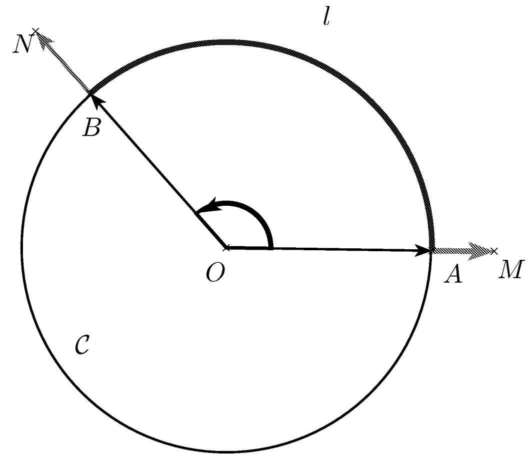
2 Angles orientés

a) Définition des mesures

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ON}$ sont deux vecteurs non-nuls.

Les demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ coupent le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O en A et B.

On associe au couple $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ une famille de nombre de la forme $l + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, où l est la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ $(l \geq O)$, parcouru de A vers B dans le sens direct.



Définition:
*Tous ces nombres sont une mesure en **radians** de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.*

Remarques:

- *On confond en général l'angle (notée $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$) et l'une de ses mesures (notée $(\vec{u}, \vec{v})$). On écrit :*

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3} \qquad ou \qquad (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$$

- *Si x est une mesure d'un angle orienté, toute autre mesure s'écrit $y = x + 2k\pi$.*
- *On dit que les mesures en radians sont définies à $\boxed{2k\pi \text{ près}}$ ou $\boxed{\text{modulo } 2\pi}$.*

b) Mesure principale

Propriété:
Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, il en existe une et une seule dans l'intervalle $I =]-\pi; \pi]$. Cette mesure est appelée mesure principale de l'angle orienté

Exemple: $\frac{43\pi}{3}$ *est une mesure d'un angle orienté.*
On a : $43\pi = \pi + 7 \times 6\pi$ donc $\frac{43\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 7 \times 2\pi$. On en déduit que cet angle orienté a pour mesure principale $\frac{\pi}{3}$.

c) Cosinus et sinus d'un angle orienté de vecteurs

x désigne la mesure en radians d'un angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Toute autre mesure est de la forme $x + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi x et $x + 2k\pi$ sont associés au même point M donc :

$$cos(x + 2k\pi) = cos(x) \text{ et } sin(x + 2k\pi) = sin(x)$$

Les fonctions $x \longmapsto cos(x)$ et $x \longmapsto sin(x)$ sont périodiques de période 2π et on peut en déduire :

Définition:
Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un angle orienté dont une mesure est le réel x, on a :

$$cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = cos(x) \text{ et } sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = sin(x)$$

*Ainsi, le **cosinus** (respectivement le **sinus**) d'un angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est le cosinus (respectivement le sinus) de l'une quelconque de ses mesures en radians.*

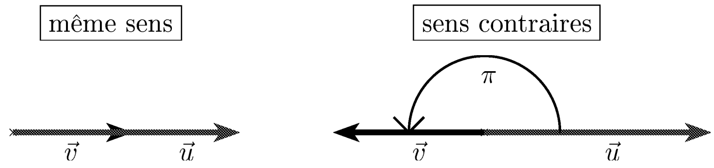
3 Propriétés des angles orientés

a) Angles et colinéarité

Théorème:
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $(\vec{u},\vec{v}) = 0$;

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires si et seulement si $(\vec{u},\vec{v}) = \pi$.

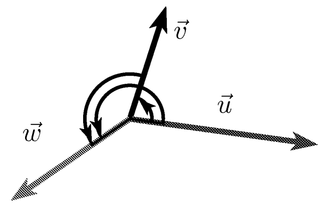


b) Relation de Chasles

Le théorème suivant, appelé **relation de Chasles** sera admis :

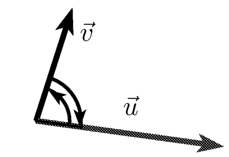
Théorème:
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w}) \quad (2\pi)$$

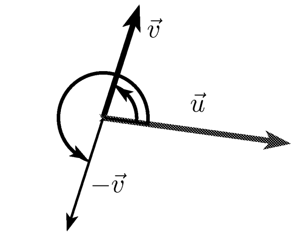


Propriété:
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

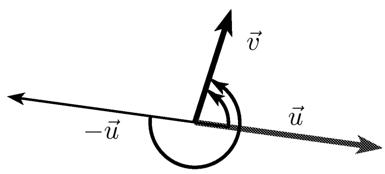
$(\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v})\ (2\pi)$



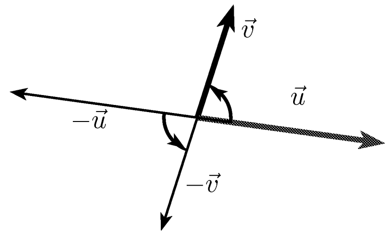
$(\vec{u},\overrightarrow{-v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi\ (2\pi)$



$(\overrightarrow{-u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi\ (2\pi)$



$(\overrightarrow{-u},\overrightarrow{-v}) = (\vec{u},\vec{v})\ (2\pi)$



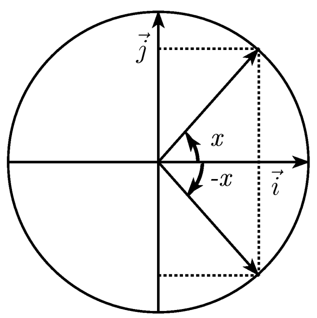
c) Cosinus et sinus d'angles associés

Propriété:
Pour des raisons de symétries, on obtient les résultats suivants :

Pour tout réel x,

$$cos(-x) = cos(x)$$

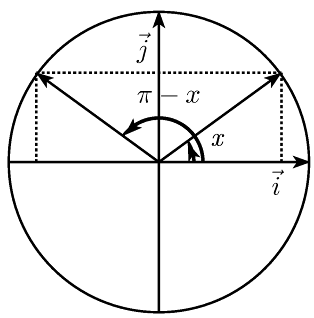
$$sin(-x) = sin(x)$$



Pour tout réel x,

$$cos(\pi - x) = -cos(x)$$

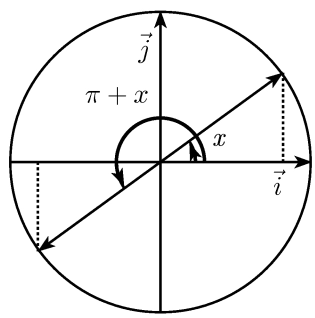
$$sin(\pi - x) = sin(x)$$



Pour tout réel x,

$$cos(\pi + x) = -cos(x)$$

$$sin(\pi + x) = -sin(x)$$



Pour tout réel x,

$$cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x)$$

$$sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x)$$