Chapitre 5: vecteurs et colinéarité

1 Vecteurs colinéaires

Définition:
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel.

Exemple:
Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ -14 \end{pmatrix}$ *sont colinéaires puisque* $-2\vec{u} = \vec{v}$.

Remarque:
Le vecteur nul est donc colinéaire à tous les vecteurs.

2 Condition de colinéarité

On se place dans un repère du plan.

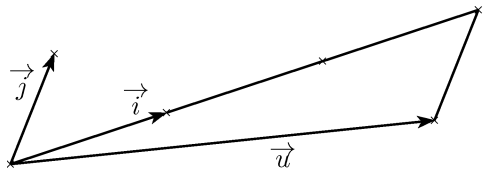
Propriété:
Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *sont colinéaires si et seulement si* $xy' - x'y = 0$

Exemple:
Dans l'exemple précédent, on a : $2 \times -(14) - (-4) \times 7 = 0$

3 Décomposition d'un vecteur

Propriété:
Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires. Alors, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe des réels a et b tels que : $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$

Exemple:
$\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$:



Relation de Chasles[1]
Pour tous points A, B et C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

1. Michel CHASLES (1793-1880) mathématicien français

4 Équation cartésienne d'une droite

4.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition:
Un vecteur directeur d'une droite est un vecteur $\overrightarrow{u}$ non-nul dont la direction est celle de d.

Remarques:
- *La donnée d'un point A et d'un vecteur non-nul définit une droite d unique.*
- *Si A et B sont deux points distincts de d alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d.*
- *Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de d, alors $k\overrightarrow{u}$, $(k \neq 0)$ est aussi un vecteur directeur de d.*

Théorème:
d et d' sont deux droites de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Dire que d et d' sont parallèles équivaut à dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

4.2 Équation cartésienne d'une droite

Théorème:
- *Toute droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec a et b deux nombres réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.*
  Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de d.
- *a, b et c sont trois nombres réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.*
  L'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient $ax + by + c = 0$ est une droite.

Définition:
Une équation de la forme $ax + by + c = 0$ est appelé équation cartésienne de la droite d de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

4.3 Lien entre vecteur directeur et coefficient directeur

Propriété:
Toute droite non-parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = mx + p$. Une équation cartésienne de cette droite est $-mx + y - p = 0$ donc on a l'équivalence suivante :

$$m \text{ est le coefficient directeur de } d \text{ équivaut à } \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } d$$