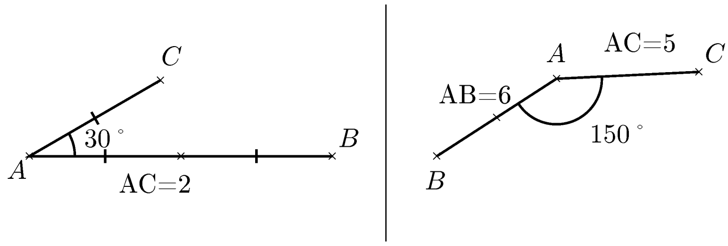
Autres expressions du produit scalaire

A) En fonction des normes et de l'angle

Exercice 1:
Dans chacune des figures ci-dessous, déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:



Exercice 2:
Soit ABC un triangle tel que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -42$, $AB = 6$ et $AC = 7\sqrt{2}$. Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Exercice 3:
Soit DEF un triangle tel que $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF} = -8$, $DE = 6$ et $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = \dfrac{-2\pi}{3}$. Déterminer la mesure de DF.

Exercice 4:
Soit GHI un triangle tel que $GH = GI = 6$ et $(\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HI}) = \dfrac{\pi}{6}$. Déterminer $\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{GI}$.

B) En fonction des coordonnées

Exercice 5:
L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :

Dans un repère orthonormal, si $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y')$ alors : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$

1. Démontrer la propriété dans le cas particulier où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
2. On suppose à présent que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.
   On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ et on introduit le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $\overrightarrow{OA} = ||\overrightarrow{OA}||.\overrightarrow{i}$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = \dfrac{\pi}{2}$.
   a. Faire un schéma pour représenter la situation.
   b. Déterminer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ en fonction de $||\overrightarrow{OA}||$, $||\overrightarrow{OB}||$ et $cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$
   c. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans ce repère.
   d. Conclure.

Exercice 6:
Dans un repère orthonormée, soit $A(2; 3)$, $B(-2; 5)$ et $C(-1; 1)$. Déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

Exercice 7:
Dans un repère orthonormée, soit $A(2; 1)$, $B(8; 2)$ et $C(3; -5)$. Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 8:
Dans un repère orthonormée, soient $\overrightarrow{u}(x_1, y_1)$, $\overrightarrow{v}(x_2, y_2)$ et $\overrightarrow{w}(x_2, y_2)$ trois vecteurs .

a. Montrer que : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
b. Montrer que : $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
c. Soit k un nombre réel quelconque. Montrer que : $(k\,\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k\,(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

C) En fonction des normes

Exercice 9:
Dans un repère orthonormée, soient $\overrightarrow{u}(x_1, y_1)$ et $\overrightarrow{v}(x_2, y_2)$ deux vecteurs.

a. Montrer que : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$

Exercice 10:
soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que : $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| = 11$; $||\overrightarrow{u}|| = 9$ et $||\overrightarrow{v}|| = 6$. Déterminer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

Exercice 11:
soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -5$; $||\overrightarrow{u}|| = 3$ et $||\overrightarrow{v}|| = 5$. Déterminer $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||$.

Exercice 12:
Soit ABC un triangle quelconque :

1. a. Montrer à l'aide de la relation de Chasles que :

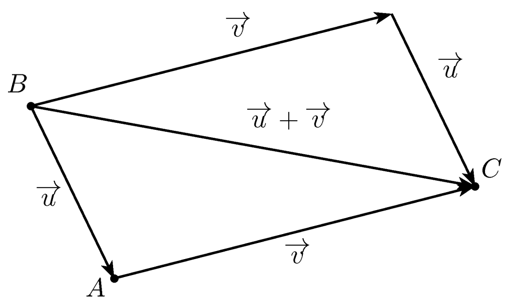
$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$$

   b. En déduire que :

$$BC^2 - AB^2 - AC^2 = -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

   c. Puis que :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[||\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{BA}||^2 - ||\overrightarrow{AC}||^2\right]$$



2. En posant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, on remarque qu'on a démontré d'une autre façon la formule suivante :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right]$$

   a. Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$

   b. Sachant que $AB = 23$ cm, $AC = 34$ cm et $BC = 37$ cm, déterminer la valeur exacte de $cos\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

   c. En déduire une valeur approché à l'unité de la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 13:
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ désignent deux vecteurs non-nuls.

a. Montrer que :

$$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2$$

b. Montrer que :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\left[||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2\right]$$