Chapitre 7: Produit scalaire

1 Définition du produit scalaire

1.1 Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

Définition:
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non-nuls colinéaires tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, notée $\vec{u}.\vec{v}$, est le nombre réel défini de la façon suivante :

- *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, $\vec{u}.\vec{v} = OA \times OB$:*

- *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens opposés, $\vec{u}.\vec{v} = -OA \times OB$:*

- *Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ on pose $\vec{u}.\vec{v} = 0$.*

Remarque:
Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par lui même, noté $\vec{u}^2$, est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$.

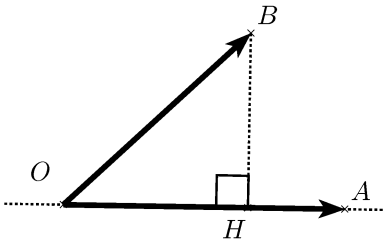
$$\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$$

1.2 Produit scalaire de deux vecteurs quelconques

Définition:
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non-nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
$\vec{u}.\vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}$, où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).

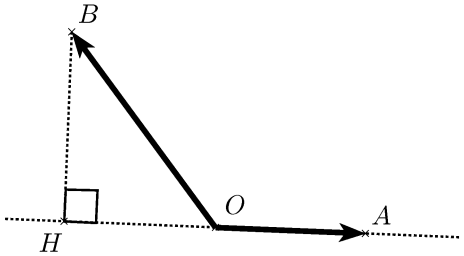
Pour $-\frac{\pi}{2} < (\vec{u}, \vec{v}) < \frac{\pi}{2}$:

$\vec{u}.\vec{v} = OA \times OH$



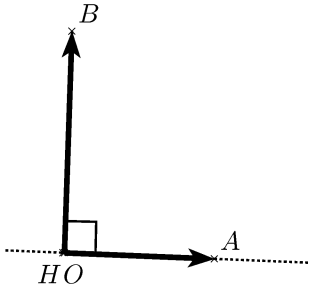
Pour $\frac{\pi}{2} < (\vec{u}, \vec{v}) < \frac{3\pi}{2}$:

$\vec{u}.\vec{v} = -OA \times OH$



Pour $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}\,(mod\,\pi)$:

$\vec{u}.\vec{v} = 0$



2 Vecteurs orthogonaux

Définition:
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si :

- *soit $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;*
- *soit $(OA) \perp (OB)$ si $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ sont non-nuls.*

Propriété:
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Démonstration:
Montrons les deux implications :

$\boxed{\Rightarrow}$
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors soit :

- *$\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;*
- *$(OA) \perp (OB)$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.*

Dans les deux cas, on a bien $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ alors soit :

- *$\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ et alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.*
- *$\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ où H est le projeté orthogonal de de B sur (OA).*
  $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$ donc $\overrightarrow{OH} = \vec{0}$ c'est à dire $H = O$ ainsi $(OA) \perp (OB)$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3 Autres expressions du produit scalaire

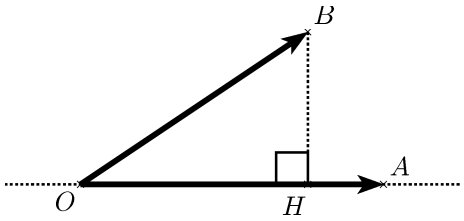
3.1 En fonction des normes et de l'angle

Propriété:
Pour tous vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Démonstration:
- ***Premier cas de figure :*** *$(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2}\,(mod\,\pi)$, on a immédiatement $cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ donc $\vec{u}.\vec{v} = 0$*

- ***Second cas de figure :*** $-\dfrac{\pi}{2} < (\vec{u}, \vec{v}) < \dfrac{\pi}{2}$

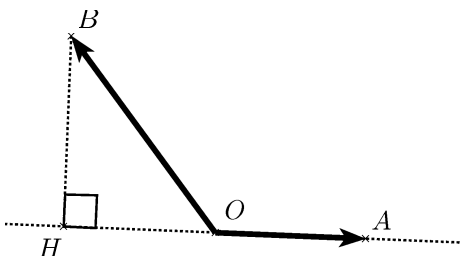


Posons $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Le projeté orthogonal de H sur (OA) est tel que $\dfrac{OH}{OB} = cos\,\widehat{AOB}$ et :

- *$OA = ||\vec{u}||$ et $OB = ||\vec{v}||$;*
- *$cos\,\widehat{AOB} = cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ donc $OH = OB \times cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = ||\vec{v}|| \times cos(\vec{u}, \vec{v})$.*

Conclusion : *$\vec{u}.\vec{v} = OA \times OH = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos(\vec{u}, \vec{v})$*

- ***troisième cas de figure :***



Posons $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Le projeté orthogonal de H sur (OA) est tel que $\dfrac{OH}{OB} = cos\,\widehat{BOH}$ et :

- $OA = ||\overrightarrow{u}||$ *et* $OB = ||\overrightarrow{v}||$;
- $cos\,\widehat{BOH} = cos[\pi - (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})] = -cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *donc* $OH = -OB \times cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -||\overrightarrow{v}|| \times cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Conclusion : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -OA \times OH = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

3.2 En fonction des coordonnées (expression analytique)

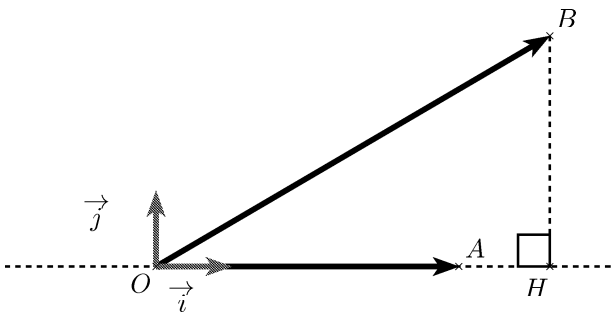
Propriété:
Si deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *ont pour coordonnées respectives* $(x; y)$ *et* $(x'; y')$ *dans un repère orthonormal, alors :*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Démonstration:
- *Si* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *(ou* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$*) alors* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0x' + 0y' = 0$ *donc la formule est vérifiée.*
- *Si* $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ *et* $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$*, on note* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.
  On utilise le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *tel que* $\overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{OA}$ *sont colinéaires de même sens et* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = \dfrac{\pi}{2}$*. Dans ce repère,*

$$A(||\overrightarrow{u}||, 0) \quad et \quad B\,(||\overrightarrow{v}||cos\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}); ||\overrightarrow{v}||sin\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$$

donc $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xx' + 0y' = xx' + yy'$



Remarque:
Si $\overrightarrow{u}(x; y)$ *alors* $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = x^2 + y^2$ *et comme* $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$*, on a :*

$$\overrightarrow{u}^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$$

Propriété:
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$*,* $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *et tout réel* k *:*
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ *On dit que le produit scalaire est symétrique.*
- $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ *et* $(k\,\overrightarrow{u})\,.\overrightarrow{v} = k\,(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$ *On dit que le produit scalaire est linéaire.*

3.3 En fonction des normes

Propriété:
Pour tous vecteurs non-nuls $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$*,*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$$

Démonstration:
Pour tous vecteurs non-nuls $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$*,*

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 &= (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})\,.\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \\ &= \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} \quad \textit{On en déduit donc que :} \\ &= ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2 \end{aligned}$$

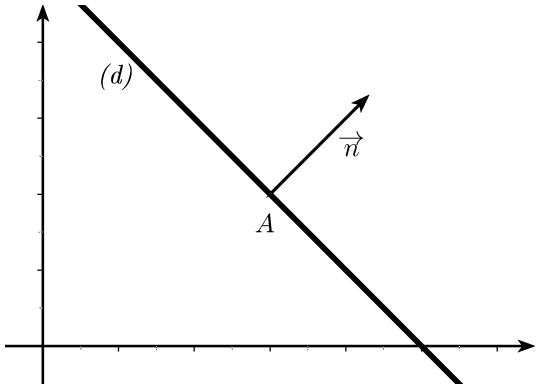
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2$$

d'où :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$$

4 Produit scalaire et équation de droite

Définition:
*Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** à une droite (d) si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et que la direction de $\vec{n}$ est orthogonale à celle de la droite (d).*



Remarque:
Un vecteur normal $\vec{n}$ d'une droite (d) est orthogonal à tout vecteur directeur de (d). Si A est un point de la droite (d), alors la droite (d) est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Théorème:
Dans un repère orthonormal,

- *Si (d) est une droite qui a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, $(a;b) \neq (0;0)$ alors le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal à (d)*
- *Si un vecteur non-nul $\vec{n}(a;b)$ est normal à (d) alors (d) a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.*

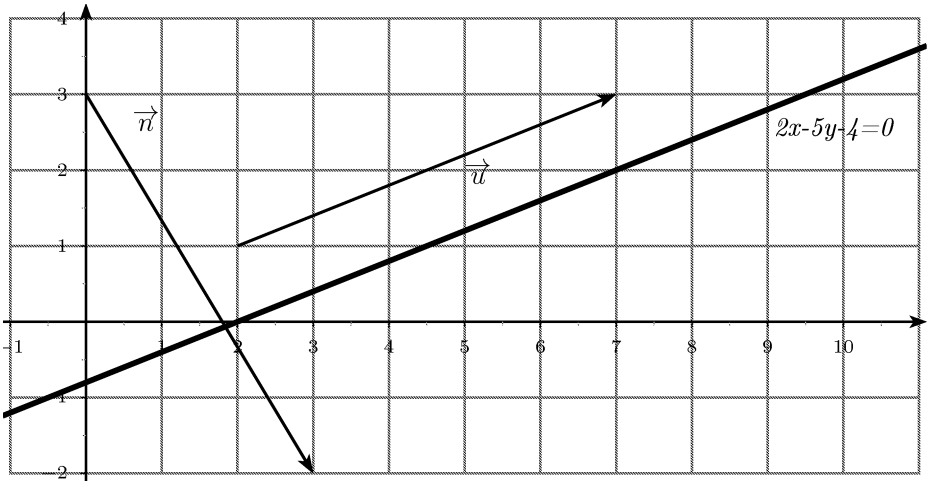
Démonstration:
$\Rightarrow$
D'après le théorème précédent, $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{u} \cdot \vec{n} = -b \times a + a \times b = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.
$\Leftarrow$
D'après la remarque précédente, (d) est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. On pose $A(x_A;y_A)$, on obtient :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)a + (x - y_A)b = 0 \Leftrightarrow ax + by + (-ax_A - by_A) = 0$$

***Conclusion :** (d) a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_A - by_A$.*

Exemple:
On a tracé dans le repère ci-dessous la droite Δ d'équation $2x - 5y - 4 = 0$:

- *$\vec{u}(5;2)$ est un vecteur directeur de Δ.*
- *$\vec{n}(2;-5)$ est un vecteur normal à Δ.*



Théorème:
Dans un repère orthonormal, les droites (d) et (d') ont pour équation respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

- *(d) et (d') sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$*
- *(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$*