

Chapitre 8: Applications de la dérivation

1 Signe de la dérivée et variations

A) Du sens de variation au signe de la dérivée

Théorème:

f est une fonction dérivable sur un intervalle I :

- si f est croissante sur I alors pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$.
- si f est décroissante sur I alors pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$.
- si f est constante sur I alors pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$.

B) Du signe de la dérivée au sens de variation

Théorème: (admis)

f est une fonction dérivable sur un intervalle I :

- si pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I .
- si pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I .
- si pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I .

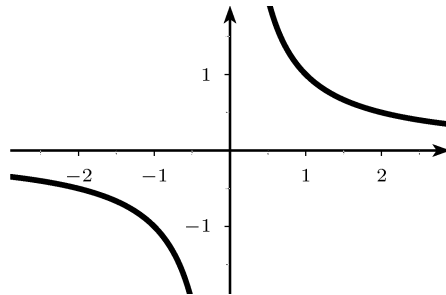
Remarques:

- L'énoncé de ce théorème n'est plus vrai si l'on remplace « intervalle » par « réunion d'intervalles ».

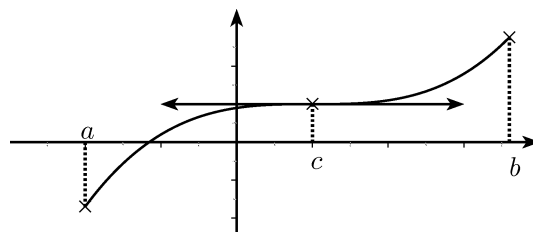
En effet, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

donc $f'(x) < 0$ sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ mais f n'est pas décroissante sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ puisque $f(-1) < f(1)$



- Une fonction croissante sur I [ou] décroissante I est dite **monotone** sur I .
- Si $f'(x) > 0$ pour tout réel x de $I = [a; b]$ ou $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x de $I = [a; b]$ mais ne s'annule qu'en un nombre fini de points de l'intervalle $I = [a; b]$ alors on dit que f est **strictement** croissante.



Dans l'exemple ci-dessus, $f'(x)$ ne s'annule qu'en $x = c$, f est alors **strictement** croissante sur l'intervalle $I = [a; b]$.

- On définit de manière analogue une fonction **strictement** décroissante sur l'intervalle $I = [a; b]$.

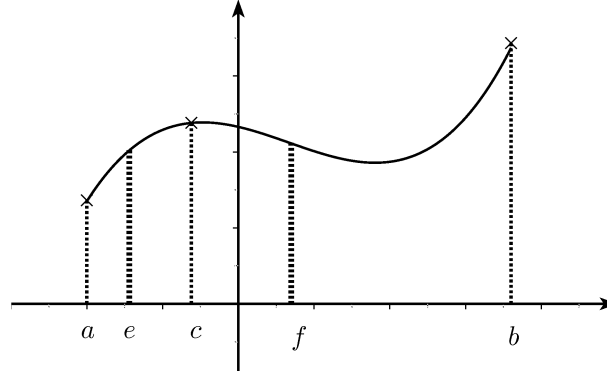
2 Extremum local

Définition:

f est une fonction définie sur un intervalle I et c est un réel de I .

- $f(c)$ est un maximum local s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant c tel que pour tout réel x de J ,

$$f(x) \leq f(c)$$



Ici, $f(c)$ est un maximum local puisque pour tout réel $x \in]e; f[$, $f(x) \leq f(c)$.

- $f(c)$ est un minimum local s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant c tel que pour tout réel x de J ,

$$f(x) \geq f(c)$$

- $f(c)$ est un extremum local si $f(c)$ est un maximum local ou un minimum local.

Théorème: (admis)

f est une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et c est un réel de I .

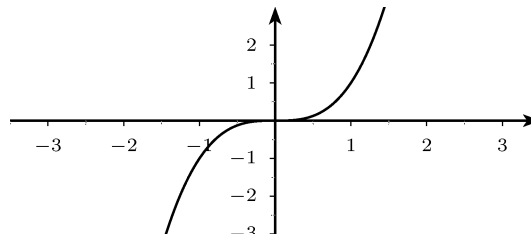
Si $f(c)$ est un extremum local de f alors $f'(c) = 0$

Remarque:

La réciproque de ce théorème est fausse. En effet, la fonction $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 3x^2$$

donc $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ d'où f est croissante sur $\mathbb{R}$.



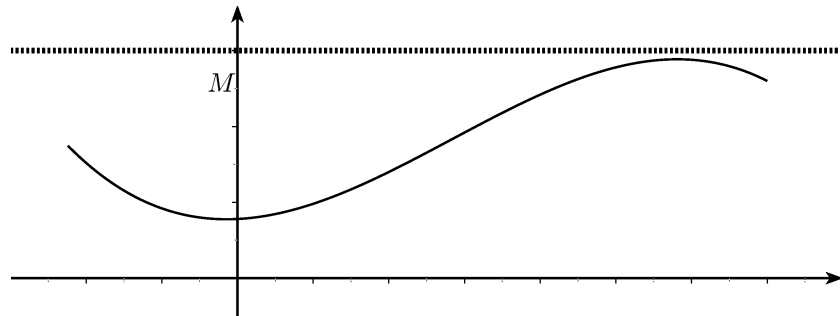
Or $f'(0) = 0$ et $f(0)$ n'est pas un extremum local de f .

3 Majorant et minorant

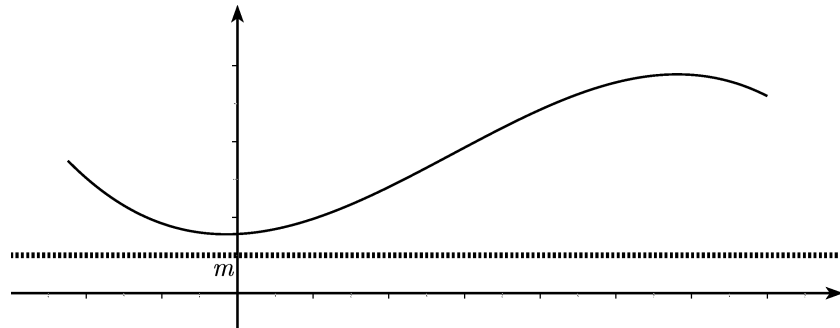
Définition:

f est une fonction définie sur un intervalle I .

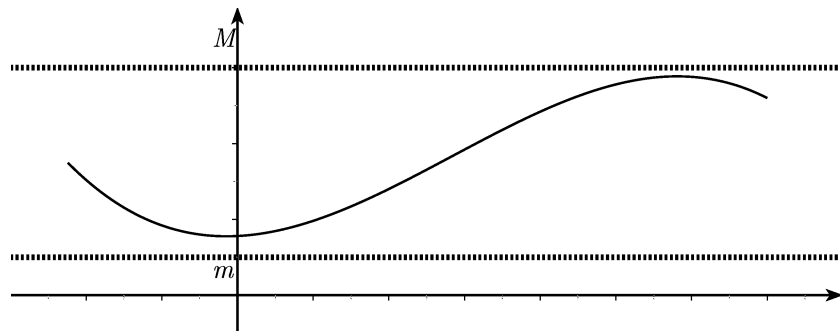
- M est un majorant de f sur I si pour tout réel x de I , $f(x) \leq M$.



- m est un minorant de f sur I si pour tout réel x de I , $f(x) \geq m$.



- f est bornée sur I si f admet un majorant et un minorant.



4 Équations $f(x) = 0$

Théorème: (admis)

f est une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$.

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.

