Variations d'une fonction dérivable

A) Du sens de variation au signe de la dérivée

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^2 + 10x - 3$. Étudier les variations de f puis le signe de f'.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x - 5$. Étudier les variations de g puis le signe de g'.
3. Quel lien semble apparaitre entre une fonction et sa fonction dérivée ?
4. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et croissante sur I.

   a. Pour tout réel $x \in I$ tel que $x + h \in I$, étudier le signe du taux d'accroissement :

   $$T(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \textit{pour} \qquad h \neq 0$$

   b. En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel $x \in I$.
5. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et décroissante sur I. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de I.
6. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et constante sur I. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de I.

B) Du signe de la dérivée au sens de variation

1. Énoncer la réciproque du théorème démontré dans la partie A).
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$.
   a. Déterminer f' puis étudier son signe.
   b. En déduire les variations de f.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.
   a. Déterminer g' puis étudier son signe.
   b. En déduire les variations de g.
   c. Peut-on dire que g est décroissante sur $\mathbb{R}^\star$?

C) Exercices

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 9x^2 + 5$
2. Étudier les variations de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{-2x+3}{x+4}$
3. Étudier les variations de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{x^2+3}{3x-1}$
4. Étudier les variations de la fonction $k : x \longmapsto -x^4 + 3x^3 - 2x^2$
5. Étudier les variations de la fonction $p : x \longmapsto 2x - 3$
6. Étudier les variations de la fonction $m : x \longmapsto -x^2 + 5x$