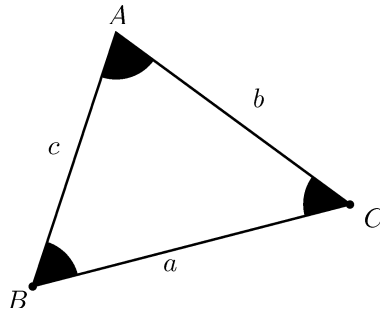


Chapitre 9: Applications du produit scalaire

1 Produit scalaire et triangle

Formule d'Al Kashi



Théorème:

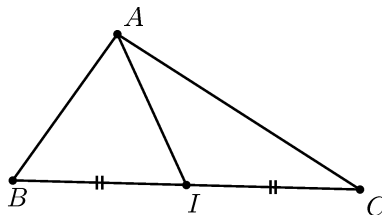
Dans le triangle ABC ci-dessus, on a :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$

Démonstration:

En exercice...

Théorème de la médiane



Théorème:

ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$, alors :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

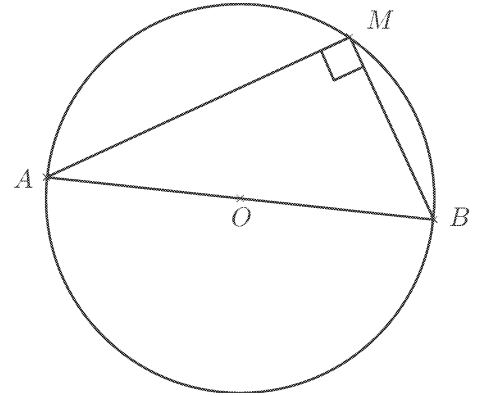
Démonstration:

En exercice...

2 Produit scalaire et cercle

Théorème:

Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$



Démonstration:

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de diamètre $[AB]$.

- Le cercle $\mathcal{C}$ privé des points A et B est l'ensemble des points M tels que AMB est un triangle rectangle en M d'où $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
- Si M est en A ou en B , $\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Propriété:

Dans un repère orthonormal,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

est une équation du cercle $\mathcal{C}$ de rayon r et de centre $I(a; b)$.

Démonstration:

En exercice...

3 Produit scalaire et trigonométrie

Théorème:

Pour tous réels a et b :

- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Démonstration:

En exercice...

Théorème:

Pour tous réels a et b :

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin 2a = 2\sin a \cos a$

Démonstration:

En exercice...