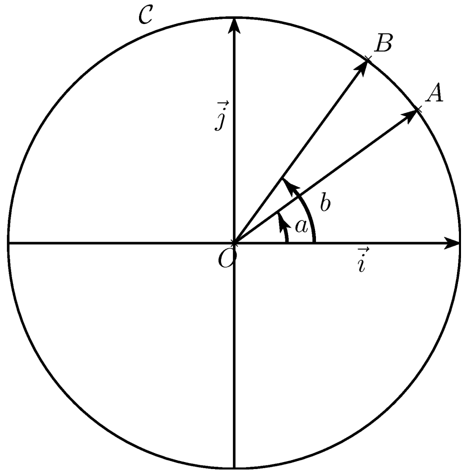
Produit scalaire et trigonométrie

Exercice 1:

Dans un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.



A et B sont les points de $\mathcal{C}$ tels que $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b$.

1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
   b. En déduire une première expression de $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$
   c. Exprimer l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ en fonction des angles $(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB})$.
   d. En déduire une deuxième expression de $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$
   e. En déduire que : $cos\,(a-b) = cos\,a\,cos\,b + sin\,a\,sin\,b$
2. a. Exprimer $cos\,(-x)$ et $sin\,(-x)$ en fonction de respectivement $cos\,x$ et $sin\,x$
   b. En déduire que : $cos\,(a+b) = cos\,a\,cos\,b - sin\,a\,sin\,b$
3. a. Exprimer $sin\,x$ en fonction de $cos\,x$
   b. En déduire que : $sin\,(a-b) = sin\,a\,cos\,b - cos\,a\,sin\,b$
4. Montrer que : $sin\,(a+b) = sin\,a\,cos\,b + cos\,a\,sin\,b$

Exercice 2:

a. Exprimer $\frac{\pi}{12}$ en fonction de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$.
b. En déduire $cos\,\frac{\pi}{12}$ et $sin\,\frac{\pi}{12}$.
c. Déterminer $cos\,\frac{\pi}{24}$ et $sin\,\frac{\pi}{24}$.

Exercice 3:

1. Démontrer que :
$$cos\,2a = cos^2\,a - sin^2\,a$$
2. En déduire que :
$$cos\,2a = 2cos^2\,a - 1 \qquad et \qquad cos\,2a = 1 - 2sin^2\,a$$
3. Démontrer que :
$$sin\,2a = 2sin\,a\,cos\,a$$

Exercice 4:

a. Exprimer $\frac{\pi}{8}$ en fonction de $\frac{\pi}{4}$.
b. En déduire $cos\,\frac{\pi}{8}$ et $sin\,\frac{\pi}{8}$.