Corrigé du devoir bilan 1

Exercice 1: 3 points

a. Par observation graphique : $\Delta > 0$, $c = -1$, $a < 0$ et $\dfrac{-b}{2a} < 0$ d'où $b < 0$

b. Par observation graphique : $\Delta < 0$, $c = 2$, $a > 0$ et $\dfrac{-b}{2a} < 0$ d'où $b > 0$

Exercice 2: 4 points

a. La courbe représentative de la fonction f est une parabole.

b. $f(x) = 64x^2 - 17x + 2$ est un polynôme du second degré et $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{17}{128}$, $\Delta = -223$ donc $\dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{223}{256}$ d'où :

$$S\left(\frac{17}{128}; \frac{223}{256}\right)$$

c. Variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. $a > 0$ donc :

x	$-\infty$		$\frac{17}{128}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{223}{256}$	$\nearrow$	

Exercice 3: 4 points

a. $3x^2 - 5x + 2$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 1 > 0$ donc l'équation $3x^2 - 5x + 2 = 0$ admet deux solutions : 1 et $\dfrac{2}{3}$.

b. $x^3 + 2x^2 + 6x = 0 \iff x(x^2 + 2x + 6) = 0$ et $x^2 + 2x + 6$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = -20 < 0$ donc l'équation $x^2 + 2x + 6 = 0$ n'admet pas de solutions. On en déduit que $x^3 + 2x^2 + 6x = 0$ pour $x = 0$.

Exercice 4: 4 points

a. $(x-3)(x+1) < x^2 \iff x^2 - 2x - 3 < x^2 \iff -2x - 3 < 0 \iff x > \dfrac{-3}{2}$ donc l'équation $(x-3)(x+1) < x^2$ admet pour ensemble solution l'intervalle $\left]\dfrac{-3}{2}; +\infty\right[$

b. $x^2 + x < 1 \iff x^2 + x - 1 < 0$ et $x^2 + x - 1$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 5 > 0$ donc l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet deux solutions : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. De plus $a = 1 > 0$, donc :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 + x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'équation $x^2 + x < 1$ admet pour ensemble solution l'intervalle $\left]\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$

Exercice 5: 5 points

a. P est un polynôme de degré 3.

b. $P(3) = 2 \times 3^3 - 9 \times 3^2 + 10 \times 3 - 3 = 0$ donc 3 est une racine du polynôme P.

c. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(x-3)(2x^2 - 3x + 1) &= 2x^3 - 3x^3 + x - 6x^2 + 9x - 3 \\ &= 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 \\ &= P(x)\end{aligned}$$

d. Étudions le signe de $2x^2 - 3x + 1$:
$2x^2 - 3x + 1$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 1 > 0$ donc l'équation $2x^2 - 3x + 1 = 0$ admet deux solutions : $\dfrac{1}{2}$ et 2. De plus $a = 2 > 0$, donc :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		3		$+\infty$
$x - 3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2 - 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	