

Corrigé du devoir bilan 5

Exercice 1:

2 points

f est dérivable en 2 donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2)$$

Par lecture graphique,

le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est 1 donc $f'(2) = 1$ d'où :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 1$$

Exercice 2:

4 points

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	1	3
$f'(x)$	9	0	-3	0

Exercice 3:

6 points

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$f'(x) = -\frac{7}{x^2} + 3$$

2. g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 12x^3 + 42x^5$$

3. Pour tout réel x , $1 + x^2 > 0$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{-5(-2x)}{(1+x^2)^2} \\ h'(x) &= \frac{10x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

4. i est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ comme fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et

$$\begin{aligned} i'(x) &= \frac{5(6-3x) - (-3)(5x-7)}{(6-3x)^2} \\ i'(x) &= \frac{9}{(6-3x)^2} \end{aligned}$$

Exercice 4:

8 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{10x}{1+x^2}$

1. Voir ci-dessous.

2.

$$\begin{aligned} f(x) = 4 &\iff \frac{10x}{1+x^2} = 4 \\ f(x) = 4 &\iff 10x = 4(1+x^2) \\ f(x) = 4 &\iff 4x^2 - 10x + 4 = 0 \end{aligned}$$

$4x^2 - 10x + 4$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 36 > 0$ donc l'équation $4x^2 - 10x + 4 = 0$ admet deux solutions : $\frac{1}{2}$ et 2 qui sont les antécédents de 4 par la fonction f .

3. Pour tout réel x , $1 + x^2 > 0$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{10(1+x^2) - 10x(2x)}{(1+x^2)^2} \\ f'(x) &= \frac{10 + 10x^2 - 20x^2}{(1+x^2)^2} \\ f'(x) &= \frac{10 - 10x^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

4. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{24}{5}$ donc Δ a pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \\ y &= \frac{24}{5}x + \frac{8}{5} \end{aligned}$$

5. $f(3) = 3$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{5}$ donc Δ' a pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(3)(x - 3) + f(3) \\ y &= -\frac{4}{5}x + \frac{27}{5} \end{aligned}$$

6. Les coordonnées de Ω sont solutions du système ci-dessous :

$$\begin{cases} y = \frac{24}{5}x + \frac{8}{5} \\ y = -\frac{4}{5}x + \frac{27}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{19}{28} \\ y = \frac{34}{7} \end{cases}$$

7. Voir ci-dessous.

