Corrigé du devoir bilan 6

Exercice 1: 5 points

1. Par lecture graphique :

x	0	2	4	6
$f(x)$	0	2	0	-6
$f'(x)$	0	1	-3	-1

2. a. $f(1) = sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f'(1) = \frac{1}{4}\,sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$

   b. Δ a pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ y &= \frac{5\sqrt{2}}{8}x - \frac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

Exercice 2: 3 points

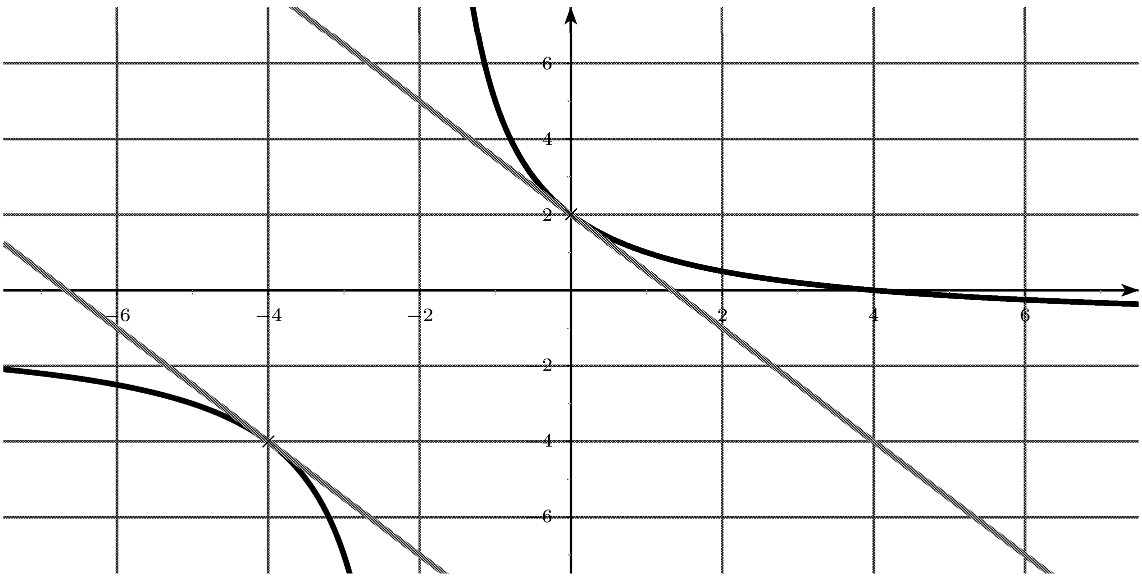
1. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ comme fonction rationnelle et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(2+x)-(4-x)}{(2+x)^2} \\ f'(x) &= \frac{-6}{(2+x)^2} \end{aligned}$$

2. Sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) = -\frac{3}{2} &\iff \frac{-6}{(2+x)^2} = -\frac{3}{2} \\ &\iff 4 = (2+x)^2 \\ &\iff (2+x)^2 - 2^2 = 0 \\ &\iff (2+x-2)(2+x+2) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad ou \quad x = -4 \end{aligned}$$

3. La courbe de la fonction f admet une tangente de coefficient directeur $-\frac{3}{2}$ en 0 et en -4.



Exercice 3: 3 points

Utiliser pour chaque question une expression différente du produit scalaire pour déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

1. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \\ &= 3 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -6\end{aligned}$$

2. On remarque que B est le projeté orthogonale de C sur (AB) donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= AB \times AB \\ &= \left(2\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 12\end{aligned}$$

3. On a $\overrightarrow{AB}(5;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-2)$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= 5 \times 1 + (-3) \times (-2) \\ &= 11\end{aligned}$$

Exercice 4: 3 points

1. On a :

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) \\ &= \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 \\ &= ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2\end{aligned}$$

2. En isolant $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ dans l'expression ci-dessus, on a :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$$

3. a. $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}(2;7)$, $||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|| = \sqrt{53}$, $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{13}$ et $||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{26}$
   b. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}(53-13-26) \\ &= 7\end{aligned}$$

Exercice 5: 6 points

1. On regarde les ordonnées à l'origine de (d) et (Δ) et on obtient $B\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et $C\,(0;3)$.

2. Les coordonnées du point A sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l} y = \frac{x}{2}+\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3}x+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{3}x+3 = \frac{x}{2}+\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3}x+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{x}{2}-\frac{1}{3}x = \frac{1}{2}-3 \\ y = -\frac{1}{3}x+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -\frac{1}{3}3+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array}\right.$$

   Conclusion : A a pour coordonnées $(3;2)$.

3. $\overrightarrow{AB}\left(-3;-\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-3;1)$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 9 - \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$
4. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}||\cdot||\overrightarrow{AC}||\cdot cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
5. On a : $||\overrightarrow{AB}|| = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ et $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{10}$ donc :

$$\begin{aligned}cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AB}||\cdot||\overrightarrow{AC}||} \\ cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) &= \frac{\frac{15}{2}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{10}} \\ cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

   On en déduit que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{4}$ puisque $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est orienté dans le sens indirect.