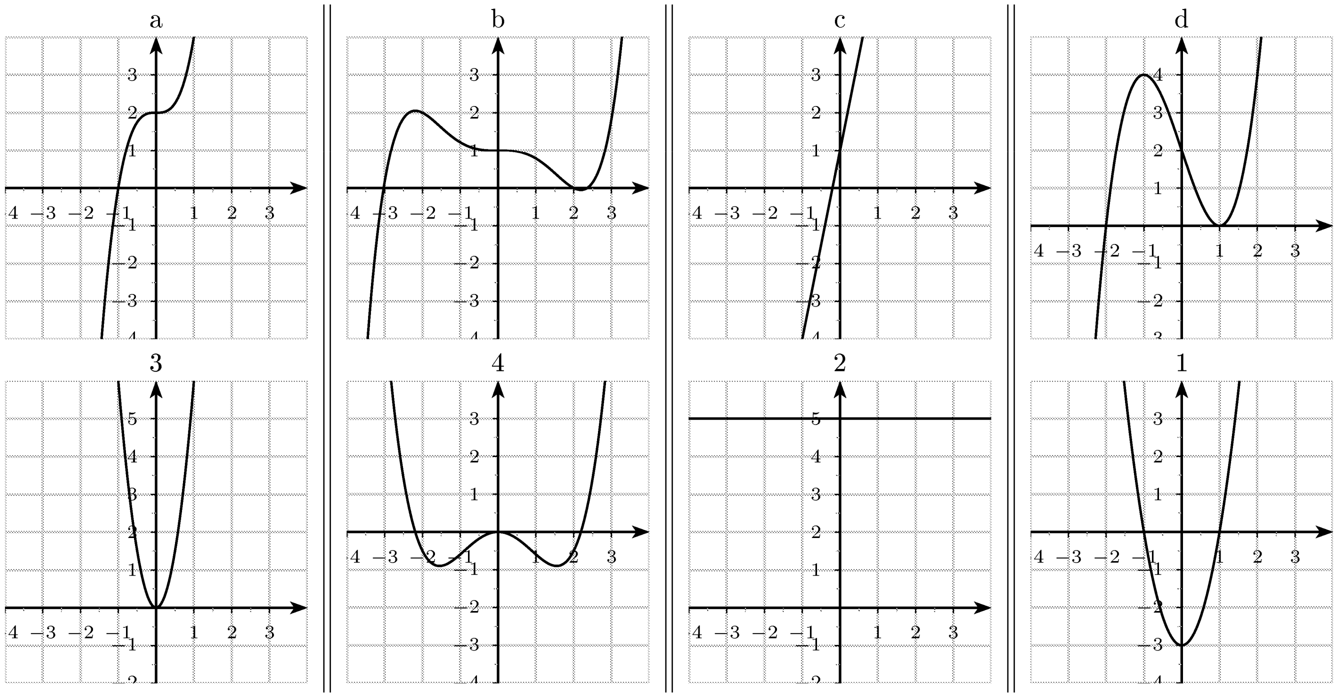
Corrigé du devoir bilan 7

Exercice 1: 4 points



Exercice 2: 4 points

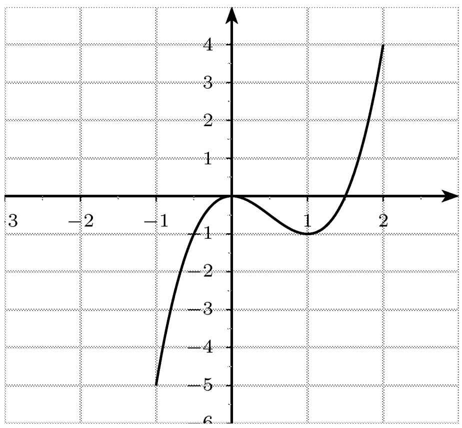
1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et $f'(x) = 6x^2 - 6x$ soit $f'(x) = 6x(x-1)$
   f' est un polynôme du second degré qui admet 0 et 1 pour racines et $a > 0$ donc f' admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On en déduit que la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0]$, croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$. On résume les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ dans le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$V(x)$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2. f admet deux extremums locaux :
   - 0 est un maximum local, il est atteint en 0 ;
   - -1 est un minimum local, il est atteint en 1.
3. A l'aide du tableau de variation, on a :
   - pour $x \in [0; 2]$, $f(x) \in [-1; 4]$;
   - pour $x \in [-1; 2]$, $f(x) \in [-5; 4]$
4. Représentation graphique de la fonction f :



Exercice 3: 4 points

	Questions	Réponses	Explications
1	Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f'(2) = -2$ et $f(2) = 1$. La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2 est :	$y = -2x + 5$	On utilise la formule du cours : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
2	Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [-2; 6]$ alors	f est croissante sur $[-2; 6]$	Application directe du cours !
3	La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$	f est positive sur $[0; +\infty[$	$f(0) = 0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$
4	Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f'(1) = 0$	$f(1)$ peut-être un extremum de f	On ne peut rien dire de plus !

Exercice 4: 8 points

1. Pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$ donc f est du signe de son numérateur. Or, pour tout réel x, $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0$
   Conclusion : $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(2) = 0$ donc 0 est un minimum global de la fonction f, il est atteint en 2.
3. $1 + x^2 > 0$ pour tout réel x donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-4)(x^2+1) - 2x(x^2-4x+4)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 6x - 4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

4. f' est du signe de $4x^2 - 6x - 4$ et $4x^2 - 6x - 4$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 100 > 0$ et $a > 0$ donc f' admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

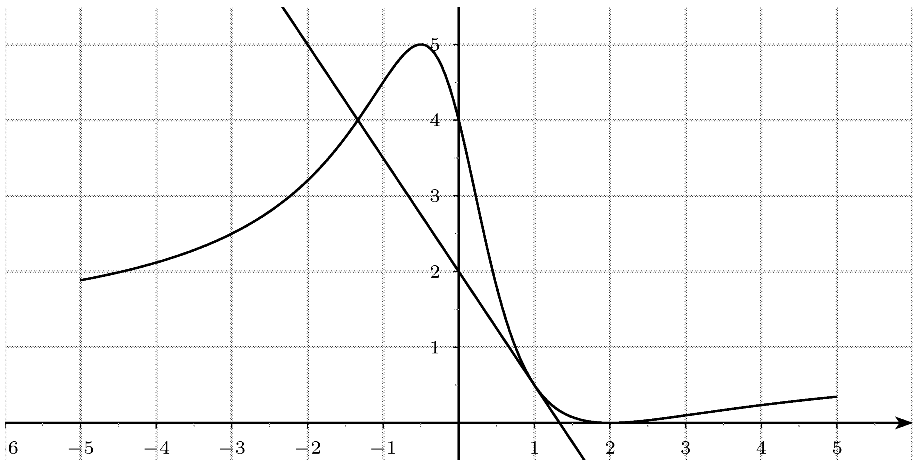
   On en déduit que la fonction f est croissante sur $]-\infty; -\frac{1}{2}]$ et sur $[2; +\infty[$ et décroissante sur $[-\frac{1}{2}; 2]$. On résume les variations de la fonction f dans le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	

5. Pour tout réel x, $f(x) \leq 5 \iff \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 1} \leq 5$ et pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$ donc

$$\begin{aligned} f(x) \leq 5 &\iff x^2 - 4x + 4 \leq 5(x^2+1) \\ &\iff -4x^2 - 4x - 1 \leq 0 \\ &\iff -(2x+1) \leq 0 \end{aligned}$$

   Conclusion : $f(x) \leq 5$ pour tout réel x
6. $f(-\frac{1}{2}) = 5$ donc d'après la question précédente, 5 est un maximum global de la fonction f, il est atteint en $-\frac{1}{2}$
7. Représentation graphique de la fonction f :



8. La tangente T à la courbe de fonction f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit $y = -\dfrac{3}{2}x + 2$
9. Voir ci-dessus.