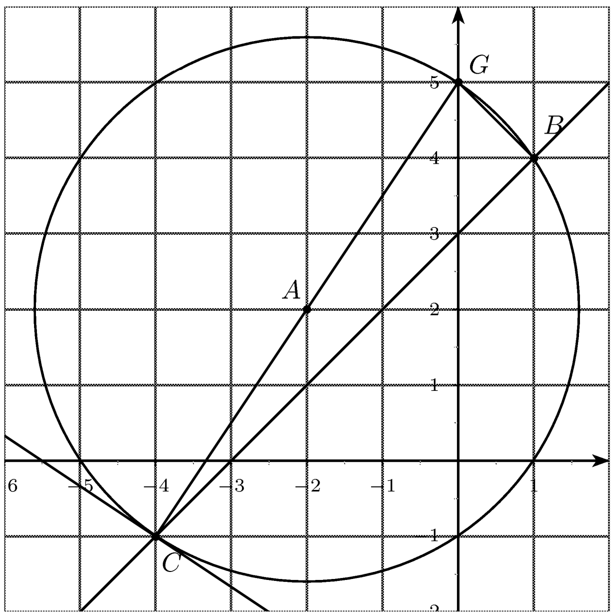
# Corrigé devoir bilan 8

**Exercice 1:** 4 points

1. Réponse D
   On utilise le théorème d'Al-Kashi dans le triangle $ABC$, on a : $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.cos\widehat{A}} \simeq 6,8$.
2. Réponse A
   On utilise le théorème d'Al-Kashi dans le triangle $ABC$, on a : $cos\widehat{A} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2ABAC} = \dfrac{29}{216}$ donc $\widehat{A} \simeq 82,3°$ .
3. Réponse B.
   L'équation du cercle est donnée par $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ avec $A(a;b)$ et $r$ le rayon du cercle.
4. Réponse A

**Exercice 2:** 6 points

1. On a :
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 4y - 5 = 0 &\iff x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 4y + 4 - 4 - 5 = 0 \\ &\iff (x+2)^2 + (y) - 2^2 = 13 \end{aligned}$$
   donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $A(-2;2)$ et de rayon $\sqrt{13}$.
2. Tracé :




3. Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $d$ sont solutions du système suivant :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 4y - 5 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + (x+3)^2 + 4x - 4(x+3) - 5 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases}$$
   Or $x^2 + (x+3)^2 + 4x - 4(x+3) - 5 = 0 \iff x^2 + 3x - 4 = 0$. Après étude du discriminant, $x^2 + 3x - 4 = 0$ admet 1 et $-4$ pour solutions. De plus, pour $x = 1$, $y = 1 + 3 = 4$ et pour $x = -4$, $y = -4 + 3 = -1$.
   **Conclusion :** $\mathcal{C}$ et $d$ s'intersectent en $B(1;4)$ et $C(-4;-1)$.
4. $\overrightarrow{AC}(-2;-3)$ est un vecteur normal à $T$ donc $T : -2x - 3y + c = 0$. De plus, $C \in T$ donc $-2 \times (-4) - 3 \times (-1) + c = 0 \Rightarrow c = -11$.
   **Conclusion :** $T : -2x - 3y - 11 = 0$
5. Le milieu du segment $[CG]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_C + x_G}{2}; \dfrac{y_C + y_G}{2}\right)(-2;2)$ donc $A$ est le milieu du segment $[CG]$.
   $[CG]$ est ainsi un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{C}$ donc le triangle $BCG$ est rectangle en $B$

**Exercice 3:** 6 points

1. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(2x+1)-(x^2+6)2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x-12}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $f'$ est du signe de $2x^2+2x-12$.

$2x^2+2x-12$ est un polynôme du second degré qui admet $-3$ et $2$ pour racines et $a>0$ donc $f'$ admet le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On en déduit que la fonction $f$ est croissante sur $]-\infty;-3]$, décroissante sur $[-3;-\frac{1}{2}[$, décroissante sur $]-\frac{1}{2};2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$. On résume les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ dans le tableau de variations ci-dessous :

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $-\frac{1}{2}$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $\nearrow$ | $-3$ | $\searrow \| \searrow$ | $2$ | $\nearrow$ |

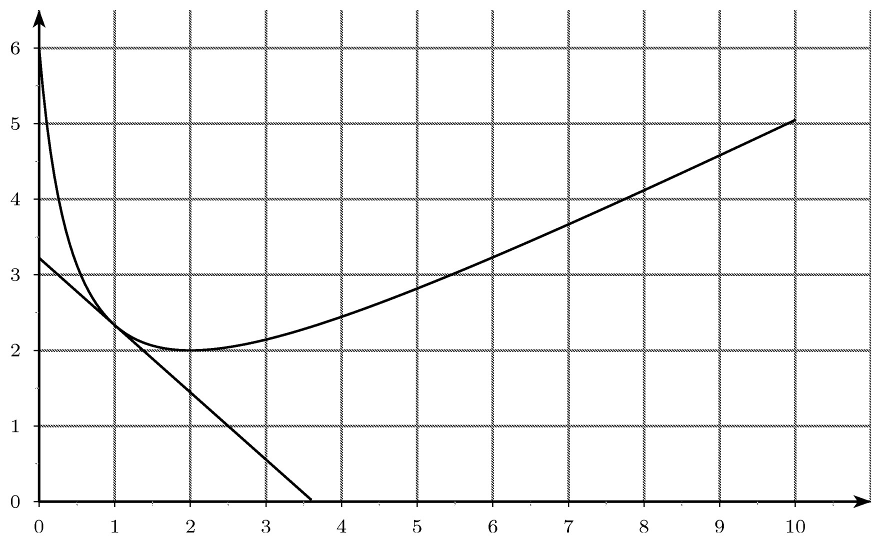
2. $f$ admet deux extremums locaux :
   - $f(-3)=-3$ est un maximum local, il est atteint en $-3$ ;
   - $h(2)=2$ est un minimum local, il est atteint en 2.
3. $f(1)=\frac{7}{3}=\frac{49}{21}$ et $f(10)=\frac{106}{21}$ donc pour $x\in[1;10]$, $f(x)\in\left[2;\frac{106}{21}\right]$
4. L'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f$ au point d'abscisse 1 est :

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

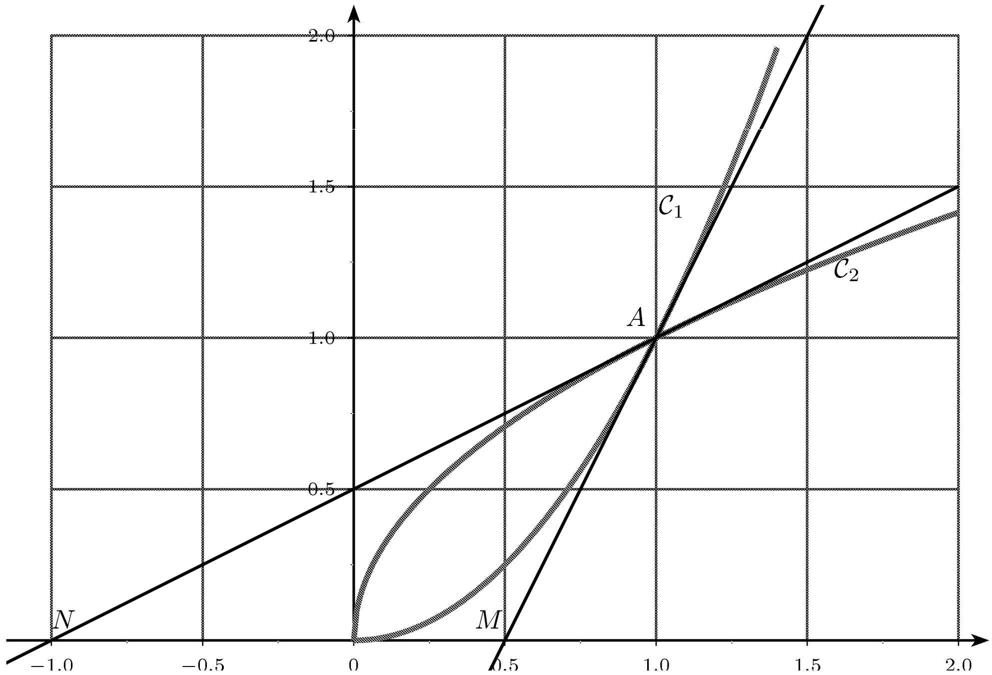
soit

$$y=-\frac{8}{9}x+\frac{29}{9}$$

5. Tracé $\mathcal{C}$ et $T$ :



**Exercice 4:** 4 points




1. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$ donc l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse 1 est :

$$\begin{array}{rcl} y & = & f'(1)(x-1)+f(1) \\ y & = & 2(x-1)+1 \\ y & = & 2x-1 \end{array}$$

2. $g$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse 1 est :

$$\begin{array}{rcl} y & = & g'(1)(x-1)+g(1) \\ y & = & \frac{1}{2}(x-1)+1 \\ y & = & \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{array}$$

3. Voir ci-dessus.
4. Les coordonnées du point d'intersection de $T_1$ et de l'axe des abscisses sont solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{c} y=0 \\ y=2x-1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} y=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

**Conclusion :** $M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$

5. Les coordonnées du point d'intersection de $T_2$ et de l'axe des abscisses sont solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{c} y=0 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} y=0 \\ x=-1 \end{array} \right.$$

**Conclusion :** $N\left(-1;0\right)$

6. **Question difficile :**
D'une part $\overrightarrow{AM}(-\frac{1}{2};-1)$ et $\overrightarrow{AN}(-2;-1)$ donc $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = 2$
D'autre par $||\overrightarrow{AM}|| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $||\overrightarrow{AN}|| = \sqrt{5}$ donc $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = \dfrac{5}{2}cos\left(\widehat{MAN}\right)$
On en déduit que $cos\left(\widehat{MAN}\right) = \dfrac{2}{5}\times 2 = \dfrac{4}{5}$
7. A l'aide de la calculatrice, on a $\widehat{MAN} \simeq 37°$.