Corrigé du devoir bilan 9

Exercice 1: 4 points

1. Réponse B. (u_n) est géométrique de raison 2 et $u_0 = -3$ donc $u_5 = -3 \times 2^5 = -96$.
2. Réponse C. (u_n) est arithmétique de raison 3 et $u_0 = -1$ donc $u_{100} = -1 + 3 \times 100 = 299$.
3. Réponse B. $2^{18} = 262144$ donc $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 262144 = S_{18}$ où (u_n) est géométrique de raison 2 et $u_0 = 1$. Ainsi $S_{18} = \dfrac{1 - 2^{19}}{1 - 2} = 2^{19} - 1 = 524287$.
4. Réponse C. $X \hookrightarrow B(10, \frac{1}{2})$ donc $E(X) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

Exercice 2: 2 points

1. On obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} u_5 = 210 \\ u_{10} = 84 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} u_0 + 5r = 210 \\ u_0 + 10r = 84 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} u_0 + 5r = 210 \\ 5r = -126 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} u_0 = 336 \\ r = -\dfrac{126}{5} \end{array}\right.$$

2. On obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} u_1 = 27 \\ u_4 = 8 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} u_0 q = 27 \\ u_0 q^4 = 8 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} u_0 = \dfrac{27}{q} \\ q^3 = \dfrac{8}{27} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} u_0 = \dfrac{81}{2} \\ q = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Exercice 3: 4 points

1. Lorsqu'on tire au hasard une boule, la probabilité qu'elle soit noire est de $\dfrac{2}{3}$.
2. a. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

$$X(\Omega) = \{0; 1; ...; 5\} \quad et \quad P(X = k) = \begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}$$

   b. $P(X = 1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\dfrac{2}{3}\right) \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 \simeq 0,041$ la probabilité d'avoir exactement une boule noire est d'environ $0,041$.

   c.

$$\begin{array}{rcl} P(X \geq 2) & = & 1 - P(X < 2) \\ & = & 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ & \simeq & 0,955 \end{array}$$

   La probabilité d'avoir au moins deux boules noires est d'environ $0,955$.

Exercice 4: 4 points

1. $u_1 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{19}{2} + 5 = \dfrac{49}{6}$, $u_2 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{49}{6} + 5 = \dfrac{139}{18}$ et $u_3 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{139}{18} + 5 = \dfrac{409}{54}$
2. a. $v_0 = u_0 - \dfrac{15}{2} = 2$.

   b. Pour tout entier n,

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{n+1} - \dfrac{15}{2} \\ & = & \dfrac{1}{3} u_n + 5 - \dfrac{15}{2} \\ & = & \dfrac{1}{3}\left(u_n - \dfrac{15}{2}\right) \\ & = & \dfrac{1}{3} v_n \end{array}$$

   On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

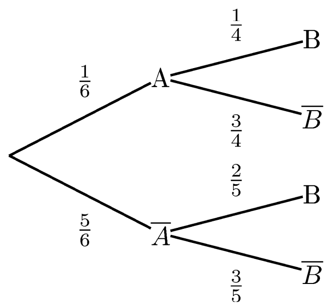
   c. $v_n = v_0 q^n = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{2}{3^n}$.

   d. $u_n = v_n + \dfrac{15}{2} = \dfrac{2}{3^n} + \dfrac{15}{2}$.

e. $u_{20} = \dfrac{2}{3^{20}} + \dfrac{15}{2} \simeq 7,5$

Exercice 5: 6 points

1. a. Arbre :



b.

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{24} + \frac{8}{24} \\ &= \frac{9}{24} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

2. a. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{3}{8}$.

$$X(\Omega) = \{0; 1; ...; 10\} \quad et \quad P(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{5}{8}\right)^{10-k}$$

b.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{3}{8}\right)^3 \left(\frac{5}{8}\right)^7 \simeq 0,236$$

La probabilité de gagner exactement trois parties est d'environ $0,236$.

c.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \left(\frac{5}{8}\right)^{10} \simeq 0,991$$

La probabilité de gagner au moins une partie est d'environ $0,991$

d. On cherche la valeur de N tel que $P(X \geq N) < \dfrac{1}{10} \Longleftrightarrow 1 - P(X < N) < \dfrac{1}{10} \Longleftrightarrow P(X < N) > \dfrac{9}{10}$ soit $N = 7$.