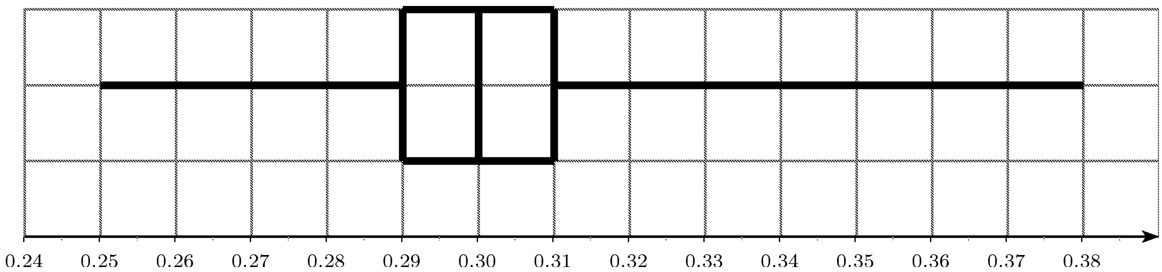
Correction du devoir commun 1

Exercice 1: 3 points

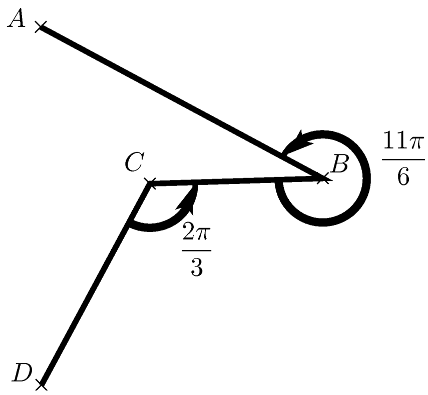
Pour faciliter l'étude, on complète un tableau avec les différentes valeurs de la série et leurs effectifs respectifs :

Valeur (x_i)	0,25	0,27	0,28	0,29	0,3	0,31	0,32	0,33	0,38
Effectif (n_i)	1	1	4	6	9	5	3	1	1

1. A l'aide de la calculatrice, on obtient $\overline{x} = 0,3$ et $\sigma = 0,022$.
2. Ici les « limites de confiance »sont à $\overline{x} - 2\sigma \simeq 0,256$ et $\overline{x} + 2\sigma \simeq 0,344$ et les « limites d'alerte »sont à $\overline{x} - 3\sigma \simeq 0,234$ et $\overline{x} + 3\sigma \simeq 0,366$.
   a. Les deux limites ont été atteintes pendant le mois.
   b. Les « limites de confiance »correspondent à l'intervalle dans lequel les mesures sont attendues ; les « limites d'alerte »correspondent à l'intervalle des mesures dans lequel aucune erreur significative n'est commise.
3. Avec la calculatrice, on a $Q_1 = 0,29$; $M_e = 0,3$ et $Q_3 = 0,31$ donc on obtient le diagramme en boîte suivant :



Exercice 2: 3 points



1.
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) &= -(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) \quad (2\pi)\\ &= -\frac{11\pi}{6} \quad (2\pi)\\ &= \frac{\pi}{6} \quad (2\pi)\end{aligned}$$

   Conclusion : La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ est $\frac{\pi}{6}$.

2. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}) \quad (2\pi)\\ &= (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) + \pi + (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}) + \pi \quad (2\pi)\\ &= \frac{\pi}{6} - (\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}) + 2\pi \quad (2\pi)\\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)\\ &= -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)\end{aligned}$$

   Conclusion : La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$ est $\frac{-\pi}{2}$.

3. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \frac{-\pi}{2}$ donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 3: 4 points

1. **Équations :**

   a. $cos\,2x = cos\,\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\,, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi\,, & k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\,, & k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k'\pi\,, & k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$

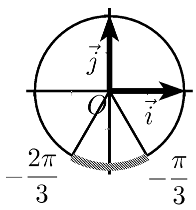
   donc $cos\,2x = cos\,\dfrac{\pi}{3}$ admet $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{5\pi}{6}$; $\dfrac{7\pi}{6}$ et $\dfrac{11\pi}{6}$ pour solutions sur l'intervalle $[0;2\pi[$.

   b. Sur $[0;2\pi[$: $\left(sin\,x - \dfrac{1}{2}\right)(cos\,x + 1) = 0 \Leftrightarrow sin\,x - \dfrac{1}{2} \quad ou \quad cos\,x + 1 = 0 \Leftrightarrow sin\,x = \dfrac{1}{2} \quad ou \quad cos\,x = -1$

   donc l'équation $\left(sin\,x - \dfrac{1}{2}\right)(cos\,x + 1) = 0$ admet $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{5\pi}{6}$; et π pour solutions sur l'intervalle $[0;2\pi[$.

2. **Inéquations :**

   a. $sin\,x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x \in \left]-\dfrac{2\pi}{3};-\dfrac{\pi}{3}\right[$.



   b. Sur $]-\pi;\pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$cos\,x$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x \times cos\,x$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

   Sur $]-\pi;\pi]$, $x \times cos\,x > 0$ pour $x \in]-\pi;-\dfrac{\pi}{2}[\cup]0;\dfrac{\pi}{2}[$

Exercice 4: 4 points

1. $x^2 + x + 2$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = -7$ donc $x^2 + x + 2 \neq 0$ pour tout réel x donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Résoudre les équations suivantes :

   a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x + 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$.
   De plus, $x^2 - 4x + 3$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 4$ donc $x^2 - 4x + 3 = 0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = 1 \quad et \quad x_2 = 3$$

   b. $f(x) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x + 2} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 3(x^2 + x + 2)$ puisque $x^2 + x + 2 \neq 0$ pour tout réel x
   Donc $f(x) = 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 3 = 0$
   De plus, $2x^2 + 7x + 3$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 25$ donc $2x^2 + 7x + 3 = 0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_3 = -3 \quad et \quad x_4 = -\frac{1}{2}$$

3. Signe de la fonction f :
   $x^2 + x + 2$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = -7$ et $a > 0$ donc $x^2 + x + 2 > 0$ pour tout réel x d'où f est du signe de $x^2 - 4x + 3$.
   De plus, $x^2 - 4x + 3$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 4$ et $a > 0$ donc on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 5: 6 points

Pour tout réel m, on définit la fonction $g_m(x) = x^2 + (m-2)x + 1 - 2m$

1. Pour tout réel m, la fonction g_m est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1$, $b = m - 2$ et $c = 1 - 2m$.
2. a. Pour $m = 3$, $g_3(x) = x^2 + x - 5$

   b. g_3 est un polynôme du second degré avec $\Delta = 21$ donc g_3 admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \quad et \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$$

3. Le discriminant de la fonction g_m est donnée par :

$$\begin{array}{rcl}\Delta_m & = & (m-2)^2 - 4 \times 1 \times (1-2m) \\ & = & m^2 - 4m + 4 - 4 + 8m \\ & = & m^2 + 4m\end{array}$$

4. Étudions le signe $m^2 + 4m$ en fonction de m.
   $m^2 + 4m$ est un polynôme du second degré qui admet 0 et -4 pour racines et $a > 0$ donc donc on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
Δ_m		$+$	0	$-$	0	$+$	

   donc $g_m(x) = 0$ admet :
   - aucune racine si $m \in]-4; 0[$;
   - une unique racine si $m = -4$ ou $m = 0$.
   - deux racines distinctes si $m \in]-\infty; -4[\cup]0; +\infty[$.
5. Soit $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de la fonction g_m dans un repère orthonormée du plan.

   a. Pour tout réel m,

$$\begin{array}{rcl}g_m(2) & = & 2^2 + (m-2) \times 2 + 1 - 2m \\ & = & 4 + 2m - 4 + 1 - 2m \\ & = 1 & \end{array}$$

   donc $A(2; 1)$ appartient à $\mathcal{C}_m$ pour tout réel m.

   b. $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2-m}{2} = 1 - \dfrac{m}{2}$

$$\begin{array}{rcl}g_m\left(1 - \frac{m}{2}\right) & = & \left(1 - \frac{m}{2}\right)^2 + (m-2) \times \left(1 - \frac{m}{2}\right) + 1 - 2m \\ & = & 1 - m + \frac{m^2}{4} + m - \frac{m^2}{2} - 2 + m + 1 - 2m \\ & = & -m - \frac{m^2}{4}\end{array}$$

   Le sommet S_m de la parabole $\mathcal{C}_m$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a}; f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$ soit $\left(1 - \dfrac{m}{2}; -m - \dfrac{m^2}{4}\right)$

   c. S_m appartient à la parabole d'équation $y = -(x-2)^2 + 1$ si ses coordonnées vérifient l'équation de la parabole.

$$\begin{array}{rcl}-\left(1 - \frac{m}{2} - 2\right)^2 + 1 & = & -\left(-1 - \frac{m}{2}\right)^2 + 1 \\ & = & -1 - m - \frac{m^2}{4} + 1 \\ & = & -m - \frac{m^2}{4}\end{array}$$

   Conclusion : Le point S_m appartient à la parabole d'équation $y = -(x-2)^2 + 1$.