Correction du devoir maison 2

Exercice 1: 1 points

Pour rappel, un nombre est premier s'il admet deux diviseurs distincts. Ici, $\sqrt{193} \simeq 13,9$ et 2, 3, 5, 7, 11, 13 sont les nombres premiers inférieurs à sa racine et aucun d'eux ne divise 193. On en déduit que 193 est un nombre premier.

Exercice 2: 4 points

a. Pour $x \neq -\dfrac{3}{2}$:

$$\begin{aligned}\frac{5x^2+6}{2x+3} = 3 &\iff 5x^2+6 = 6x+9 \\ &\iff 5x^2-6x-3=0\end{aligned}$$

Or $5x^2-6x-3$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 96$ donc $5x^2-6x-3=0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{3+2\sqrt{6}}{5} \quad et \quad x_2 = \frac{3-2\sqrt{6}}{5}$$

Conclusion : $\dfrac{5x^2+6}{2x+3} = 3$ admet $\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}$ et $\dfrac{3-2\sqrt{6}}{5}$ pour solutions.

b.

$$\begin{aligned}(2x+1)(3x-2) = 6 &\iff 6x^2-x-2=6 \\ &\iff 6x^2-x-8=0\end{aligned}$$

Or $6x^2-x-8$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 193$ donc $6x^2-x-8=0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{193}}{12} \quad et \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{193}}{12}$$

Conclusion : $(2x+1)(3x-2)=6$ admet $\dfrac{1+\sqrt{193}}{12}$ et $\dfrac{1-\sqrt{193}}{12}$ pour solutions.

Exercice 3: 7 points

a. On remarque que $P(-4)=P(-3)=P(1)=P(2)=P(3)=0$ donc les cinq racines du polynôme P sont -4, -3, 1, 2 et 3.

b. En faisant un parallèle avec les polynômes du second degré, on propose $(x-1)(x-2)(x-3)(x+4)(x+3)$ comme factorisation de P.
Or, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(x-1)(x-2)(x-3)(x+4)(x+3) &= (x^2-3x+2)(x^2-9)(x+4) \\ &= (x^2-3x+2)(x^3+4x^2-9x-36) \\ &= x^5+4x^4-9x^3-36x^2-3x^4-12x^3+27x^2+108x+2x^3+8x^2-18x-72 \\ &= x^5+x^4-19x^3-x^2+90x-72 \\ &= P(x)\end{aligned}$$

Conclusion : $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x+4)(x+3)$

c. A l'aide d'un tableau de signe, on obtient :

x	$-\infty$		-4		-3		1		2		3		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

d. g est définie lorsque $P(x) \geq 0$ soit sur $[-4;-3] \cup [1;2] \cup [3;+\infty[$ et h est définie lorsque $P(x) \neq 0$ soit sur $\mathbb{R} \setminus \{-4;-3;1;2;3\}$

Exercice 4: 8 points

a. x^2+x+1 est un polynôme du second degré avec $\Delta = -3$ donc $x^2+x+1 \neq 0$ pour tout réel x donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. D'après la question précédente, pour tout réel x, x^2+x+1 est du signe de a c'est à dire strictement positif donc $f(x)$ est du signe de x^2+x-1.
Or x^2+x-1 est un polynôme du second degré avec $\Delta = 5$ donc $x^2+x-1=0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad et \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

De plus $a = 1 > 0$, donc :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c.

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}=\frac{1}{2} &= 2(x^2+x-1)=x^2+x+1\\ &= 2x^2+2x-2-x^2-x-1=0\\ &= x^2+x-3=0\end{aligned}$$

Or x^2+x-3 est un polynôme du second degré avec $\Delta=13$ donc $x^2+x-3=0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \quad et \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

Conclusion : Les antécédents de $\frac{1}{2}$ par la fonction f sont $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

d.

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}=m &= x^2+x-1=m(x^2+x+1)\\ &= (1-m)x^2+(1-m)x-1-m=0\end{aligned}$$

Pour $m=1$, on obtient $-2=0$ donc 1 n'admet pas d'antécédents par la fonction f.
Pour $m\neq 1$, $(1-m)x^2+(1-m)x-1-m$ est un polynôme du second degré

$$\begin{aligned}\Delta &= (1-m)^2-4(1-m)(-1-m)\\ &= \underline{(1-m)}(16m)+4\underline{(1-m)}(1+m)\\ &= (1-m)(1-m+4+4m)\\ &= (1-m)(5+3m)\end{aligned}$$

donc $(1-m)x^2+(1-m)x-1-m=0$ admet des solutions si $\Delta=(1-m)(5+3m)\geq 0$
Or $(1-m)(5+3m)=-3m^2-2m+5$ est un polynôme du second degré avec $a>0$ et $-\frac{5}{3}$ et 1 pour racines donc :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où $\Delta\geq 0$ pour $m\in\left[-\frac{5}{3};1\right[$ puisque on travaille pour $m\neq 1$

Conclusion : L'équation $f(x)=m$ admet des solutions pour $m\in\left[-\frac{5}{3};1\right[$

e. Le minimum de la fonction f est $-\frac{5}{3}$ d'après la question précédente.