Correction du devoir maison 5

Exercice 1: 10 points

1. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$$f'(x) = 14x - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et

$$g'(x) = 42x^6 + x^3$$

3. h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}$ comme fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}$ et

$$h'(x) = \frac{-2}{(-3+2x)^2}$$

4. x^2+x+2 est un polynôme du second degré et $\Delta = -7 < 0$ donc $x^2+x+2 \neq 0$ pour tout réel x d'où i est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} i'(x) &= \frac{4(x^2+x+2)-(4x+1)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2} \\ i'(x) &= \frac{-4x^2-2x+7}{(x^2+x+2)^2} \end{aligned}$$

Note :
Une fonction rationnelle est un fonction quotient de deux polynômes, par exemple :

$$f(x) = \frac{x^2+7x-3}{2x-3}$$

Une fonction homographique est un cas particulier de fonction rationnelle, elle est quotient de deux fonctions affines, par exemple :

$$f(x) = \frac{-5+x}{x+1}$$

5. j est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonction dérivable sur $]0;+\infty[$

$$j'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

Exercice 2: 10 points

1. **Construction et conjecture**

Le point I semble appartenir à la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.

2. **Démonstration**

a. On observe que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x$ donc :

- D a pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t)+f(t) \\ y &= t(x-t)+\frac{t^2}{2} \\ y &= tx - t^2 + \frac{t^2}{2} \\ y &= tx - \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

- D' a pour équation :

$$\begin{array}{rcl} y & = & f'\left(-\frac{1}{t}\right)\left(x+\frac{1}{t}\right)+f\left(-\frac{1}{t}\right) \\ y & = & -\frac{1}{t}\left(x+\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}\right)^2 \\ y & = & \frac{-1}{t}x-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2t^2} \\ y & = & \frac{-1}{t}x-\frac{1}{2t^2} \end{array}$$

b. Les coordonnées du point I sont solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} y = tx-\frac{t^2}{2} \\ y = \frac{-1}{t}x-\frac{1}{2t^2} \end{array}\right.$$

On obtient l'équation suivante :

$$\begin{array}{rcl} tx-\frac{t^2}{2} & = & \frac{-1}{t}x-\frac{1}{2t^2} \\ tx+\frac{1}{t}x & = & \frac{t^2}{2}-\frac{1}{2t^2} \\ x\left(t+\frac{1}{t}\right) & = & \frac{1}{2}\left(t^2-\left(\frac{1}{t}\right)^2\right) \\ x\left(t+\frac{1}{t}\right) & = & \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right) \end{array}$$

Or $t+\frac{1}{t}=\frac{t^2+1}{t}\neq 0$ pour tout réel t non-nul donc :

$$\begin{array}{rcl} tx-\frac{t^2}{2} & = & \frac{-1}{t}x-\frac{1}{2t^2} \\ x & = & \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} y & = & t\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)-\frac{t^2}{2} \\ y & = & \frac{t^2}{2}-\frac{t}{2t}-\frac{t^2}{2} \\ y & = & -\frac{t}{2t} \end{array}$$

Et comme $t\neq 0$, on a finalement :

$$I\left(\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right);-\frac{1}{2}\right)$$

c. On en déduit que le point I appartient à la droite d'équation $y=-\frac{1}{2}$.

Remarque

Pour montrer que le lieu du point I **est** la droite d'équation $y=-\frac{1}{2}$, il faut montrer que tous les points de la droite correspondent à au moins un point I pour une valeur de m donné, ce qui est le cas ici.

Pour s'en convaincre, il suffit de regarder la représentation graphique de la fonction $t\longmapsto\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$.
On observe que cette fonction prend toutes les valeurs réelles possibles.
Ainsi pour tout point de la droite d'équation $y=-\frac{1}{2}$, il existe un réel t tel que $\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$ est l'abscisse de ce point.