Corrigé du devoir maison 7

Exercice 1:

10 points

1. d. Pour tout point M ,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

Comme O est le milieu de $[AB]$, $\text{vect}OA \cdot \overrightarrow{OB} = -4 \times 4 = -16$ et $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \vec{0}$ donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) - 16 \\ &= \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MO} \cdot (\vec{0}) - 16 \\ &= MO^2 - 16\end{aligned}$$

2. Étude pour $k = 20$.

a. Avec GeoGebra.

b. Soit $M \in \mathcal{F}_{20}$, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 20 \implies MO^2 - 16 = 20 \implies MO^2 = 36$ donc M est situé sur le cercle de centre O et de rayon 6.c. Réciproquement, si M est situé sur le cercle de centre O et de rayon 6 alors $MO = 6 \implies MO^2 = 36 \implies \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 20$ donc $M \in \mathcal{F}_{20}$.**Conclusion :** $\mathcal{F}_{20}$ est le cercle de centre O et de rayon 6.3. Soit $M \in \mathcal{F}_0$, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \implies MO^2 - 16 = 0 \implies MO^2 = 16$ donc M est situé sur le cercle de centre O et de rayon 4.Réciproquement, si M est situé sur le cercle de centre O et de rayon 4 alors $MO = 4 \implies MO^2 = 16 \implies \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ donc $M \in \mathcal{F}_0$.**Conclusion :** $\mathcal{F}_0$ est le cercle de centre O et de rayon 4.4. Soit $M \in \mathcal{F}_{-20}$, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -20 \implies MO^2 - 16 = -20 \implies MO^2 = -4$ donc et il n'y a aucun point M vérifiant $MO^2 = -4$ donc $\mathcal{F}_{-20} = \emptyset$.

Exercice 2:

5 points

1. $x^2 + x + 1$ est un polynôme du second degré et $\Delta = -3 < 0$ donc $x^2 + x + 1 \neq 0$ pour tout réel x d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-5(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(1 - 5x)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ f'(x) &= \frac{5x^2 - 6 - 2x}{(x^2 + x + 1)^2}\end{aligned}$$

2. g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ comme fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $g'(x) = \frac{-12}{(x-2)^2}$ 3. h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ $h(x) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 3:

5 points

1. $f(x) = 3 \iff x^3 - 2x^2 - 3x + 3 = 3 \iff x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \iff x(x^2 - 2x - 3) = 0$ Or $x^2 - 2x - 3$ est un polynôme du second degré et $\Delta = 16 > 0$ donc $x^2 - 2x - 3 = 0$ pour $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$.**Conclusion :** $f(x) = 3$ pour $x \in \{-1; 0; 3\}$ 2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et $f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$ 3. $f'(x) = 3 \iff 3x^2 - 4x - 3 = 3 \iff 3x^2 - 4x - 6 = 0 \iff x \in \left\{ \frac{2 - \sqrt{22}}{3}; \frac{2 + \sqrt{22}}{3} \right\}$ **Conclusion :** $f(x) = 3$ pour

$$x \in \left\{ \frac{2 - \sqrt{22}}{3}; \frac{2 + \sqrt{22}}{3} \right\}$$