

# Corrigé du devoir maison 8

## Exercice 1:

10 points

1. a. Pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} 4(x-5)(x+7)(x-2) &= (4x-20)(x^2+5x-14) \\ &= 4x^3-156x+280 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

b. Signe de  $h$  :

| $x$    | $-\infty$ | $-7$  | $2$     | $5$   | $+\infty$ |
|--------|-----------|-------|---------|-------|-----------|
| $x-5$  |           | -     | -       | - 0 + |           |
| $x+7$  |           | - 0 + | +       | +     |           |
| $x-2$  |           | -     | - 0 +   | +     |           |
| $h(x)$ |           | - 0 + | 0 - 0 + |       |           |

c.  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme et  $h'(x) = 12x^2 - 156$  soit  $h'(x) = 12(x^2 - 13)$   
 $h'$  est un polynôme du second degré qui admet  $-\sqrt{13}$  et  $\sqrt{13}$  pour racines et  $a > 0$  donc  $h'$  admet le tableau de signe suivant :

| $x$     | $-\infty$ | $-\sqrt{13}$ | $\sqrt{13}$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|--------------|-------------|-----------|
| $h'(x)$ |           | +            | 0 - 0 +     |           |

On en déduit que la fonction  $h$  est croissante sur  $] -\infty; -\sqrt{13}]$ , décroissante sur  $[-\sqrt{13}; \sqrt{13}]$  et croissante sur  $[\sqrt{13}; +\infty[$ .  
 On résume les variations de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$  dans le tableau de variations ci-dessous :

| $x$    | $-\infty$ | $-\sqrt{13}$    | $\sqrt{13}$    | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----------------|----------------|-----------|
| $h(x)$ |           | $h(-\sqrt{13})$ | $h(\sqrt{13})$ |           |

d.  $h$  admet deux extremums locaux :

- $h(-\sqrt{13}) = 104\sqrt{13} + 280$  est un maximum local, il est atteint en  $-\sqrt{13}$ ;
- $h(\sqrt{13}) = -104\sqrt{13} + 280$  est un minimum local, il est atteint en  $\sqrt{13}$ .

2. a.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme et  $f'(x) = 4x^3 - 156x + 280 = h(x)$ . D'après la question 1b, on a :

| $x$    | $-\infty$ | $-7$  | $2$     | $5$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|-------|---------|-----|-----------|
| $h(x)$ |           | - 0 + | 0 - 0 + |     |           |

On en déduit que la fonction  $f$  est décroissante sur  $] -\infty; -7]$ , croissante sur  $[-7; 2]$ , décroissante sur  $[2; 5]$  et croissante sur  $[5; +\infty[$ . On résume les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  dans le tableau de variations ci-dessous :

| $x$    | $-\infty$ | $-7$    | $2$   | $5$  | $+\infty$ |
|--------|-----------|---------|-------|------|-----------|
| $f(x)$ |           | $-3381$ | $264$ | $75$ |           |

b.  $f$  admet trois extremums locaux :

- $-3381$  est un minimum local, il est atteint en  $-7$ ;
- $264$  est un maximum local, il est atteint en  $2$ ;
- $75$  est un minimum local, il est atteint en  $5$ .

c. L'équation de la tangente à la courbe de la fonction  $f$  au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

soit

$$y = 128x + 75$$

**Exercice 2:**

10 points

1. Soit  $f$  la fonction qui à  $x$  associe le volume du cube.  $f$  est définie sur  $[0; 20]$  par  $f(x) = x^3$ . Comme  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  atteint son maximum en  $x = 20$  et le volume du cube est alors de  $f(20) = 8000 \text{ cm}^3$
2. Soit  $h$  la fonction qui à  $x$  associe le volume restant dans la pièce de bois parallélépipédique. Le volume de la pièce de bois parallélépipédique est donnée par  $20 \times 30 \times x$  soit  $600x$  d'où  $h$  est définie sur  $[0; 20]$  par  $h(x) = 600x - x^3$ .

$h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme et  $h'(x) = 600 - 3x^2$ .

$h'$  est un polynôme du second degré qui admet  $x_1 = -10\sqrt{2} \simeq -14,14$  et  $x_2 = 10\sqrt{2} \simeq 14,14$  pour racines et  $a < 0$  donc  $h'$  admet le tableau de signe suivant :

|         |           |       |       |           |
|---------|-----------|-------|-------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | $-$       | $+$   | $-$   | $-$       |

On en déduit que la fonction  $h$  est croissante sur  $[0; x_2]$  et décroissante sur  $[x_2; 20]$ . On résume les variations de la fonction  $h$  sur  $[0; 20]$  dans le tableau de variations ci-dessous :

|        |   |          |    |
|--------|---|----------|----|
| $x$    | 0 | $x_2$    | 20 |
| $h(x)$ |   | $h(x_2)$ |    |

Comme  $h(x_2) = 4000\sqrt{2} \simeq 5657$  on en déduit que  $h$  atteint son maximum en  $x = 10\sqrt{2}$  et le volume restant est alors d'environ  $5657 \text{ cm}^3$ .