Corrigé devoir maison 9

Exercice 1: 4 points

1. Réponse A

   On utilise le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABC, on a : $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.cos\widehat{A}} \simeq 3,6$.
2. Réponse D

   On utilise le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABC, on a : $cos\widehat{A} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2ABAC} = \dfrac{29}{216}$ donc $\widehat{A} \simeq 83°$.
3. Réponse D.

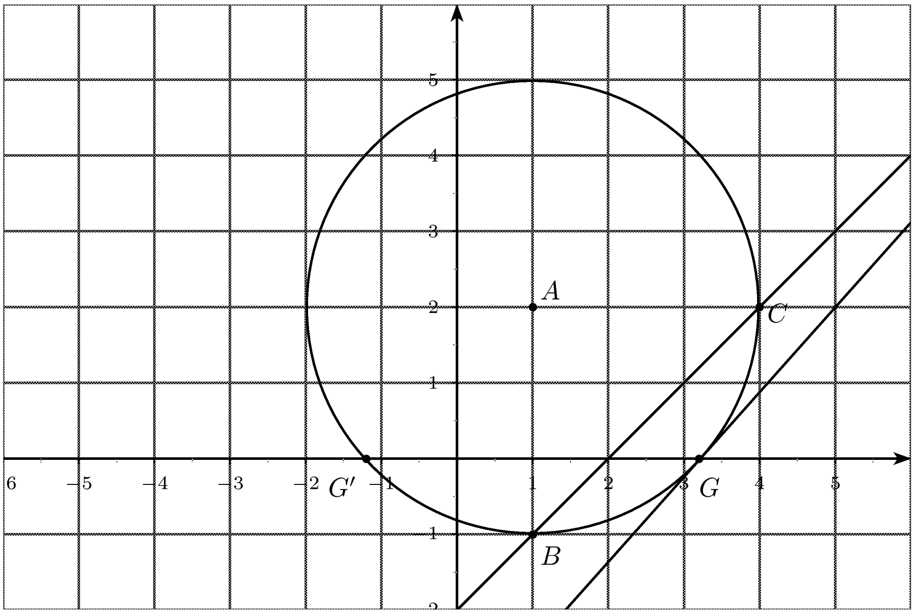
   L'équation du cercle est donnée par $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ avec $A(a;b)$ et r le rayon du cercle.
4. Réponse C

Exercice 2: 6 points

1. On a :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 &\iff x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 - 4 = 0 \\ &\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9 \end{aligned}$$

   donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $A(1;2)$ et de rayon 3.
2. Tracé :



3. Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et d sont solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \\ y = x - 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x^2 + x^2 - 4x + 4 - 2x - 4x + 8 - 4 = 0 \\ y = x - 2 \end{array} \right.$$

   Or $x^2 + x^2 - 4x + 4 - 2x - 4x + 8 - 4 = 0 \iff x^2 - 5x + 4 = 0$. Après étude du discriminant, $x^2 - 5x + 4 = 0$ admet 1 et 4 pour solutions. De plus, pour $x = 1$, $y = 1 - 2 = -1$ et pour $x = 4$, $y = 4 - 2 = 2$.
   Conclusion : $\mathcal{C}$ et d s'intersectent en $B(1;-1)$ et $C(4;2)$.
4. Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses sont solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x^2 - 2x - 4 = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

   Après étude du discriminant, $x^2 - 2x - 4 = 0$ admet $1 + \sqrt{5}$ et $1 - \sqrt{5}$ pour solutions. **Conclusion :** $\mathcal{C}$ et d s'intersectent en $G'(1-\sqrt{5};0)$ et $G(1+\sqrt{5};0)$.
5. $\overrightarrow{AG}(\sqrt{5};-2)$ est un vecteur normal à T donc $T : \sqrt{5}x - 2y + c = 0$. De plus, $G \in T$ donc $\sqrt{5} \times (1+\sqrt{5}) - 2 \times 0 + c = 0 \Rightarrow c = -5 - \sqrt{5}$.
   Conclusion : $T : \sqrt{5}x - 2y - 5 - \sqrt{5} = 0$

Exercice 3: 6 points

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)(2x+2)-(x^2+x+4)2}{(2x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2+4x-6}{(2x+2)^2} \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, f' est du signe de $2x^2+4x-6$.
$2x^2+4x-6$ est un polynôme du second degré qui admet -3 et 1 pour racines et $a>0$ donc f' admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en déduit que la fonction f est croissante sur $]-\infty;-3]$, décroissante sur $[-3;-1[$, décroissante sur $]-1;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. On résume les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ dans le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$h(x)$		$\nearrow$	$-\frac{5}{2}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

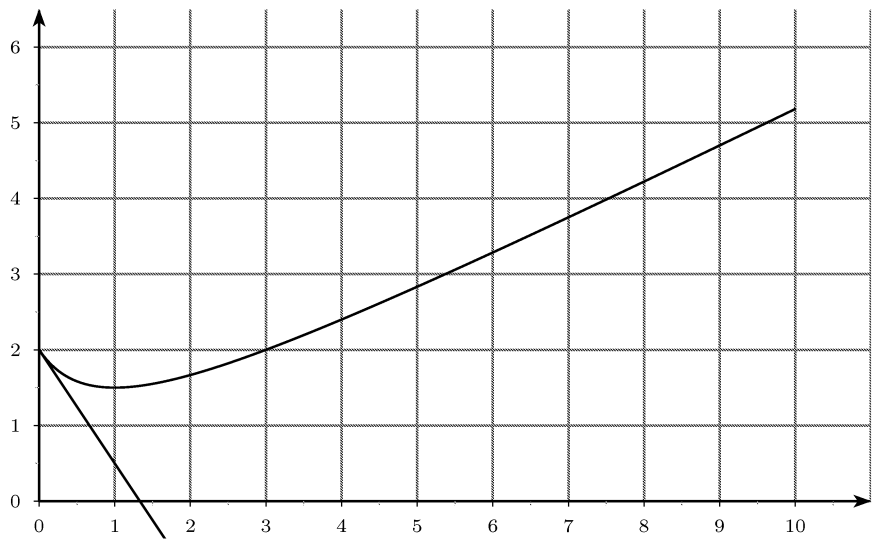
2. f admet deux extremums locaux :
   - $f(-3) = -\dfrac{5}{2}$ est un maximum local, il est atteint en -3 ;
   - $f(1) = \dfrac{3}{2}$ est un minimum local, il est atteint en 1.
3. $f(-\frac{1}{2}) = \dfrac{15}{4}$ et $f(8) = \dfrac{38}{9}$ donc pour $x \in [-\frac{1}{2};8]$, $f(x) \in \left[\dfrac{3}{2};\dfrac{38}{9}\right]$
4. L'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x-0)+f(0)$$

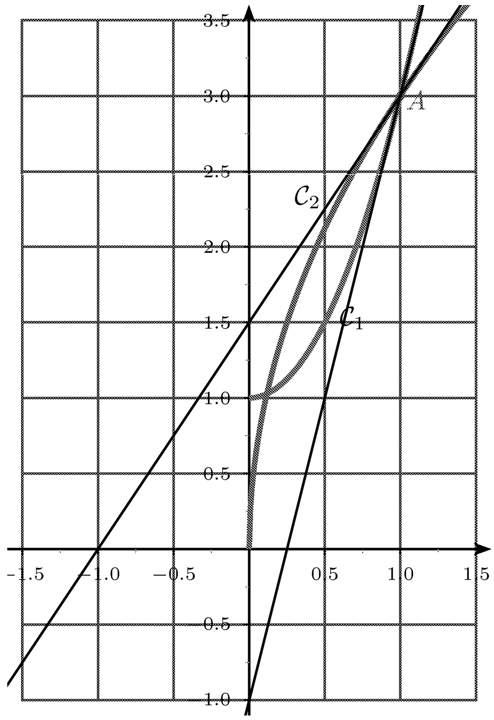
soit

$$y = -\frac{3}{2}x+2$$

5. Tracé $\mathcal{C}$ et T :



Exercice 4: 4 points



1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x$ donc l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse 1 est :
$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1)+f(1) \\ y &= 4(x-1)+3 \\ y &= 4x-1 \end{aligned}$$
2. g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ donc l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse 1 est :
$$\begin{aligned} y &= g'(1)(x-1)+g(1) \\ y &= \frac{3}{2}(x-1)+3 \\ y &= \frac{3}{2}x+\frac{3}{2} \end{aligned}$$
3. Voir ci-dessus.
4. Les coordonnées du point d'intersection de T_1 et de l'axe des abscisses sont solutions du système
$$\left\{\begin{array}{c} y=0 \\ y=4x-1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} y=0 \\ x=\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$
Conclusion : $M\left(\dfrac{1}{4};0\right)$
5. Les coordonnées du point d'intersection de T_2 et de l'axe des abscisses sont solutions du système
$$\left\{\begin{array}{c} y=0 \\ y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} y=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$$
Conclusion : $N\,(-1;0)$
6. **Question difficile :**
D'une part $\overrightarrow{AM}(-\frac{3}{4};-3)$ et $\overrightarrow{AN}(-2;-3)$ donc $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = \dfrac{21}{2}$
D'autre par $||\overrightarrow{AM}|| = \dfrac{3\sqrt{17}}{4}$ et $||\overrightarrow{AN}|| = \sqrt{13}$ donc $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = \dfrac{3\sqrt{221}}{4}cos\left(\widehat{MAN}\right)$
On en déduit que $cos\left(\widehat{MAN}\right) = \dfrac{21}{2}\times\dfrac{4}{3\sqrt{221}} = \dfrac{14}{\sqrt{221}}$
7. A l'aide de la calculatrice, on a $\widehat{MAN} \simeq 20°$.