

Math.en.Jeans

# COMPTER DES DROITES FINIES

**Tiphaine BARAT**  
**Adèle GIRAUD**  
**Fanny ORHON**

**Lycée Guy Moquet**  
**1ère S-L**  
**Sujet proposé par François Ducrot**

## Compter des droites finies

On appelle plan projectif fini un ensemble fini d'éléments appelés droites, possédant un certain nombre de sous-ensembles appelés points. On veut que les points et les droites vérifient certaines propriétés :

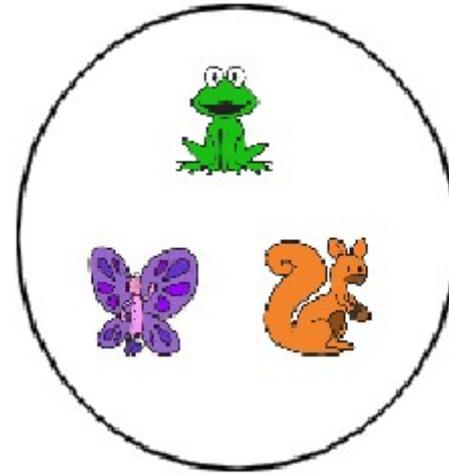
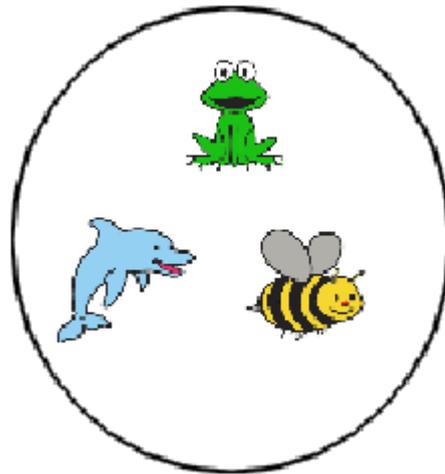
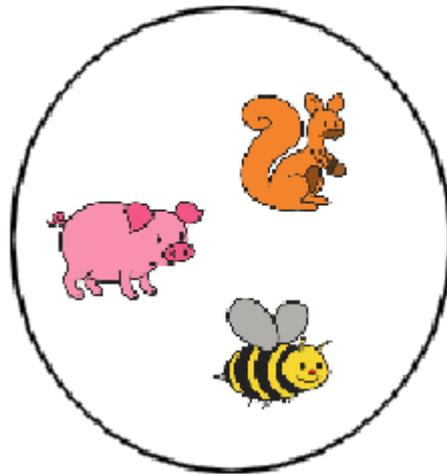
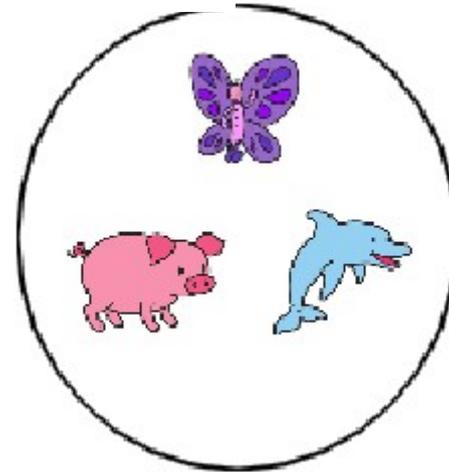
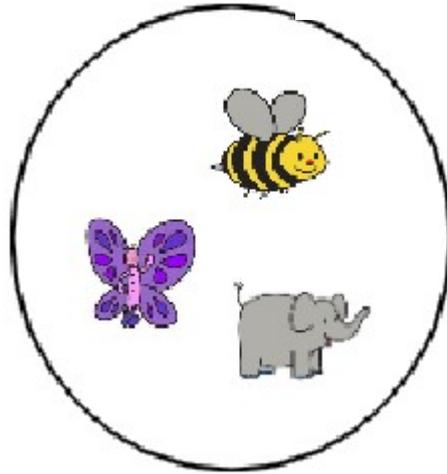
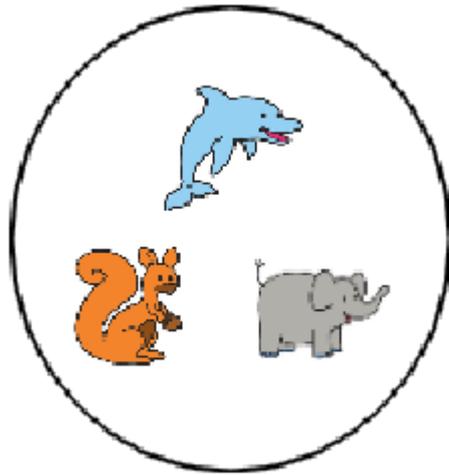
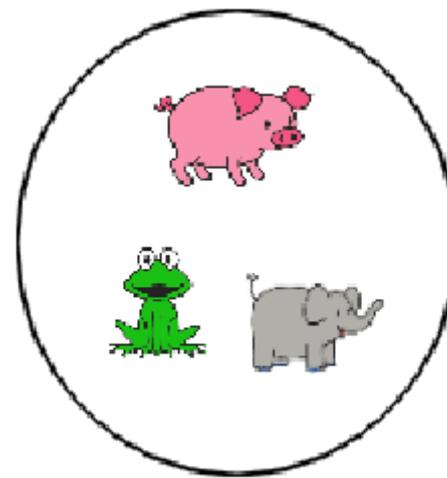
- **deux droites distinctes se coupent toujours exactement en un point**
- **il existe un ensemble  $F$  constitué de 4 points, tel qu'aucune droite ne coupe  $F$  en plus de 2 points**
- **par deux points distincts, il passe exactement une droite**

On cherche à déterminer de tels ensemble. En tâtonnant, on peut ainsi voir assez facilement que le plus petit plan projectif est constitué de 7 points. Pour trouver le suivant, c'est déjà moins simple ; on est alors conduit à étudier le problème de façon générale.

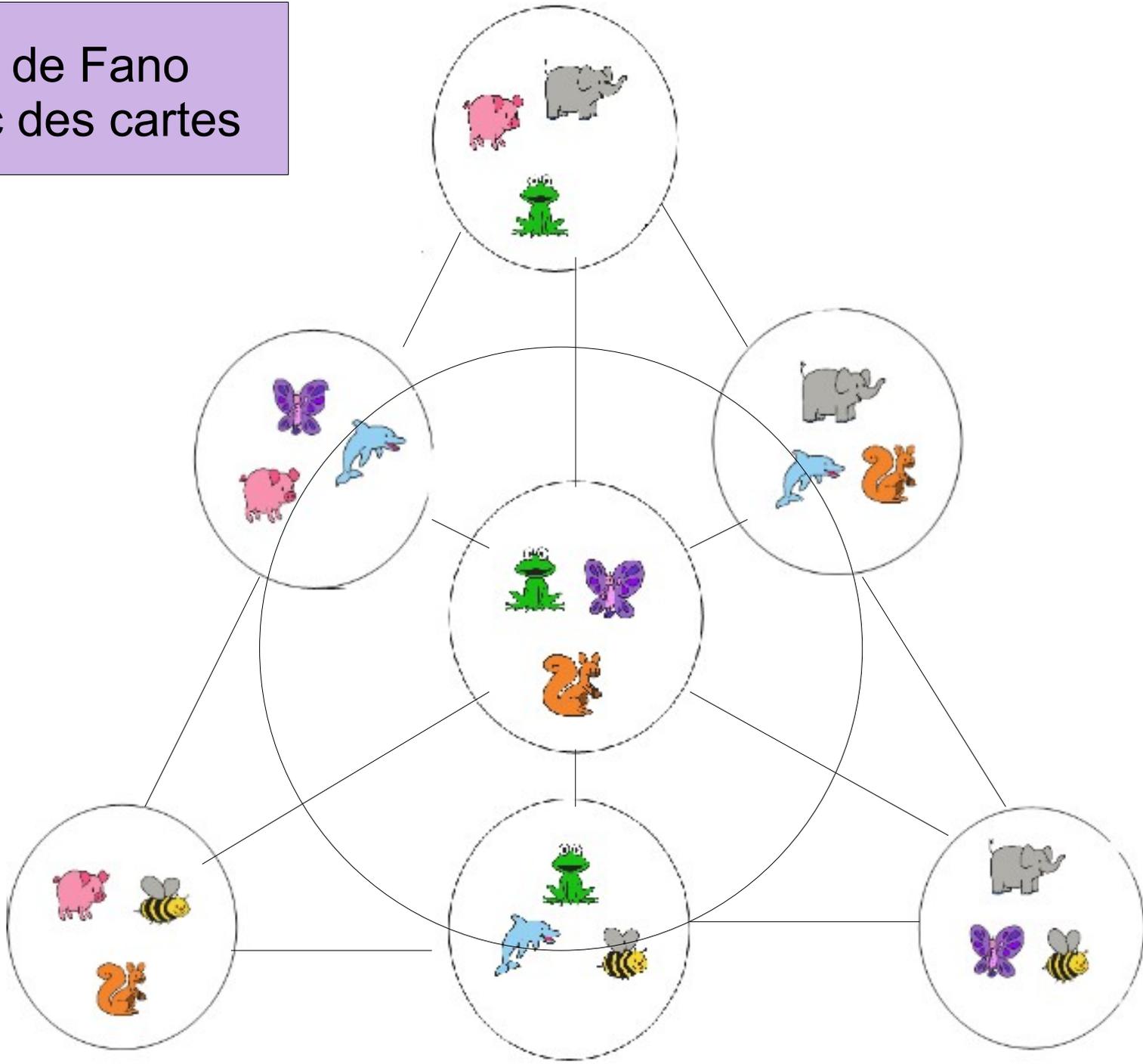
Un homme invite 31 personnes chez lui pendant le mois de janvier. Il souhaite passer chaque journée avec six d'entre eux en faisant en sorte de voir tous les invités le même nombre de fois et que deux invités ne passent la journée ensemble qu'une seule fois durant le mois.

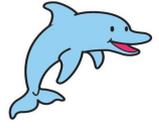
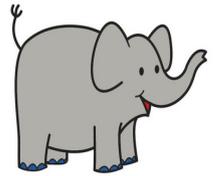
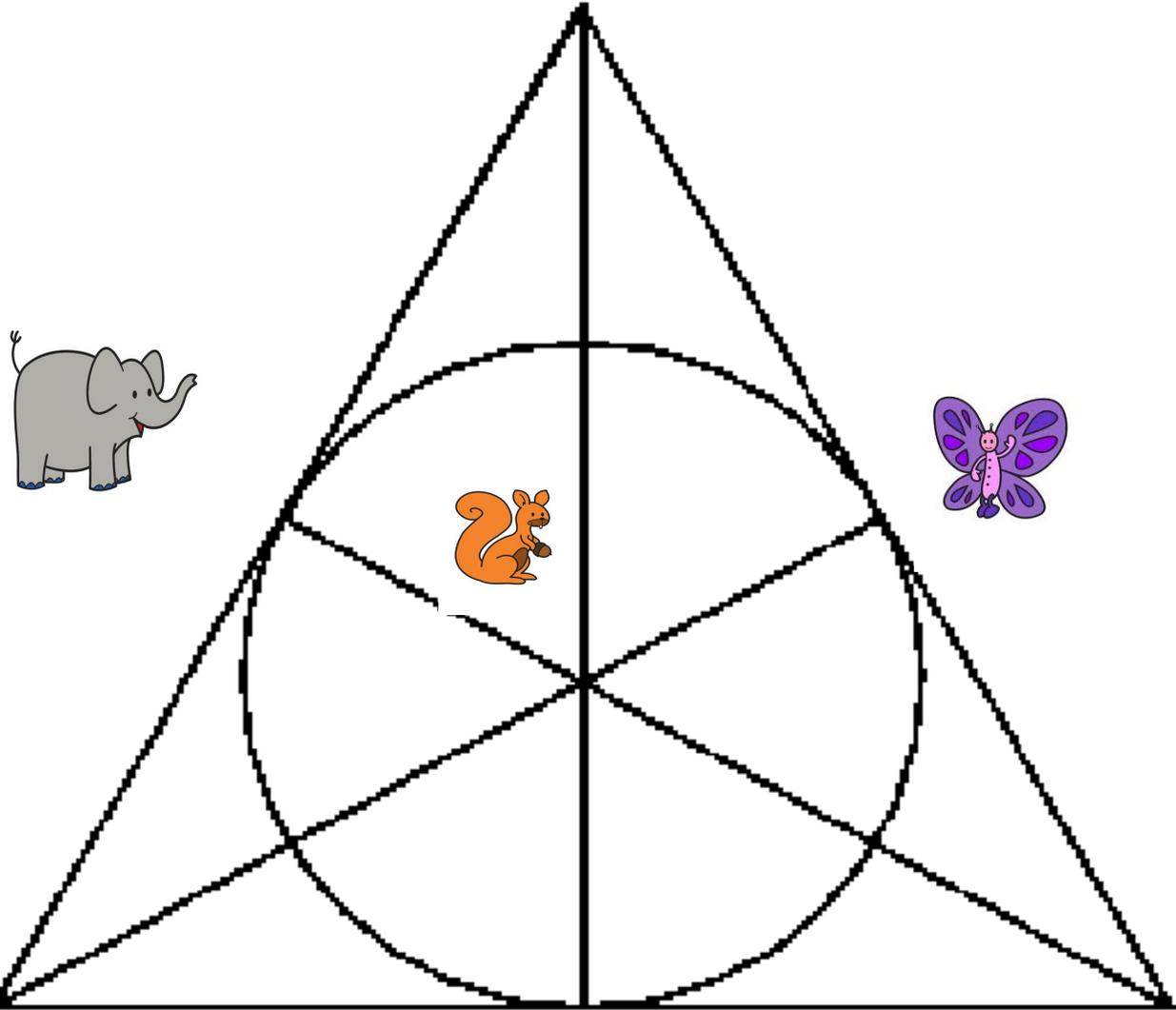
Est-il possible de réaliser le souhait de cet homme, et si oui, comment ?

# DOBBLE

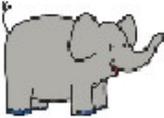
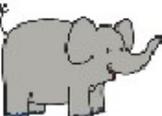


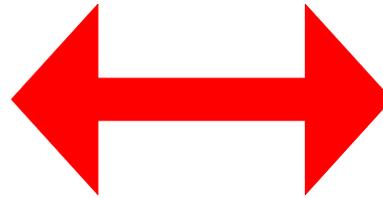
Plan de Fano  
avec des cartes

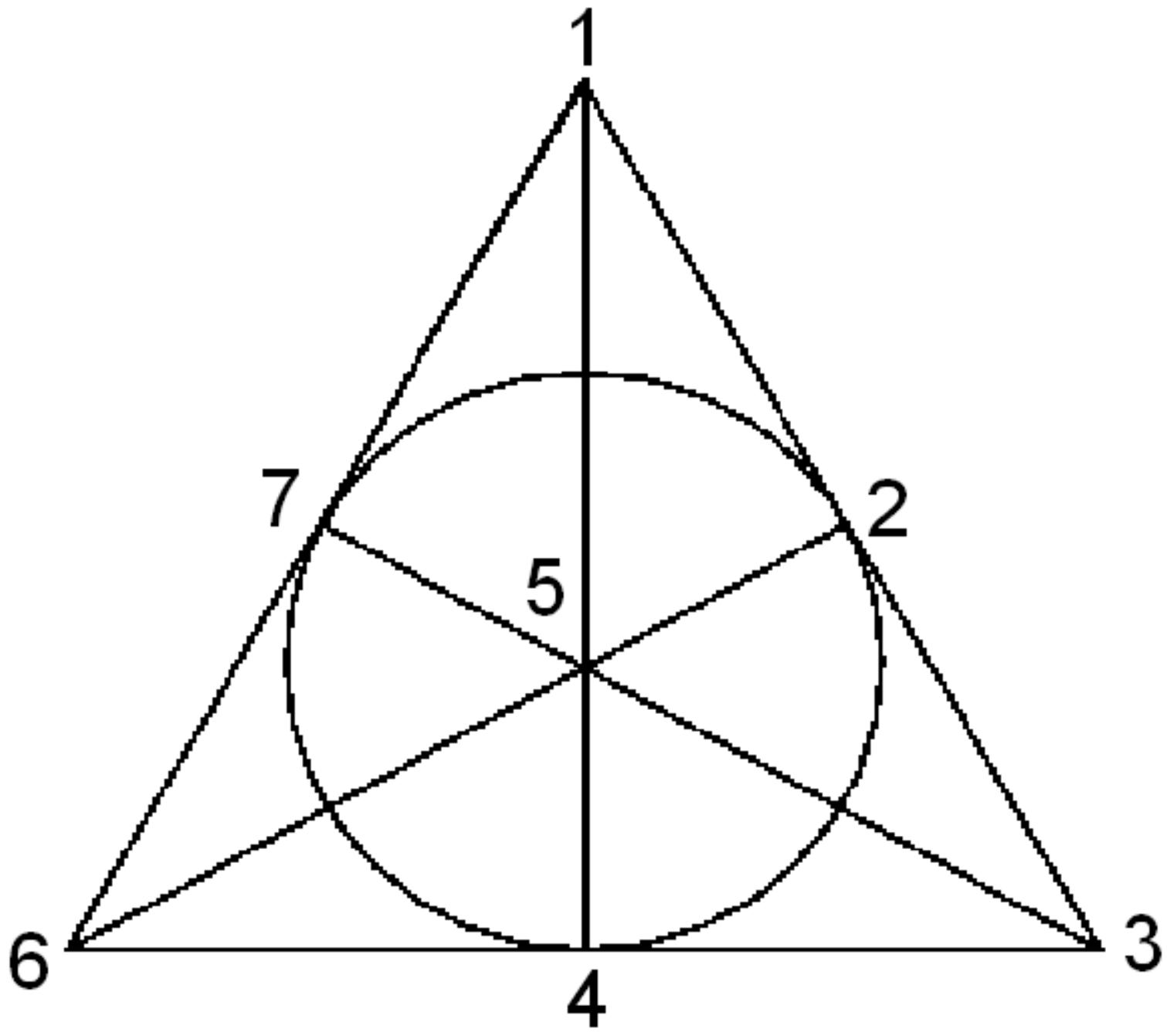




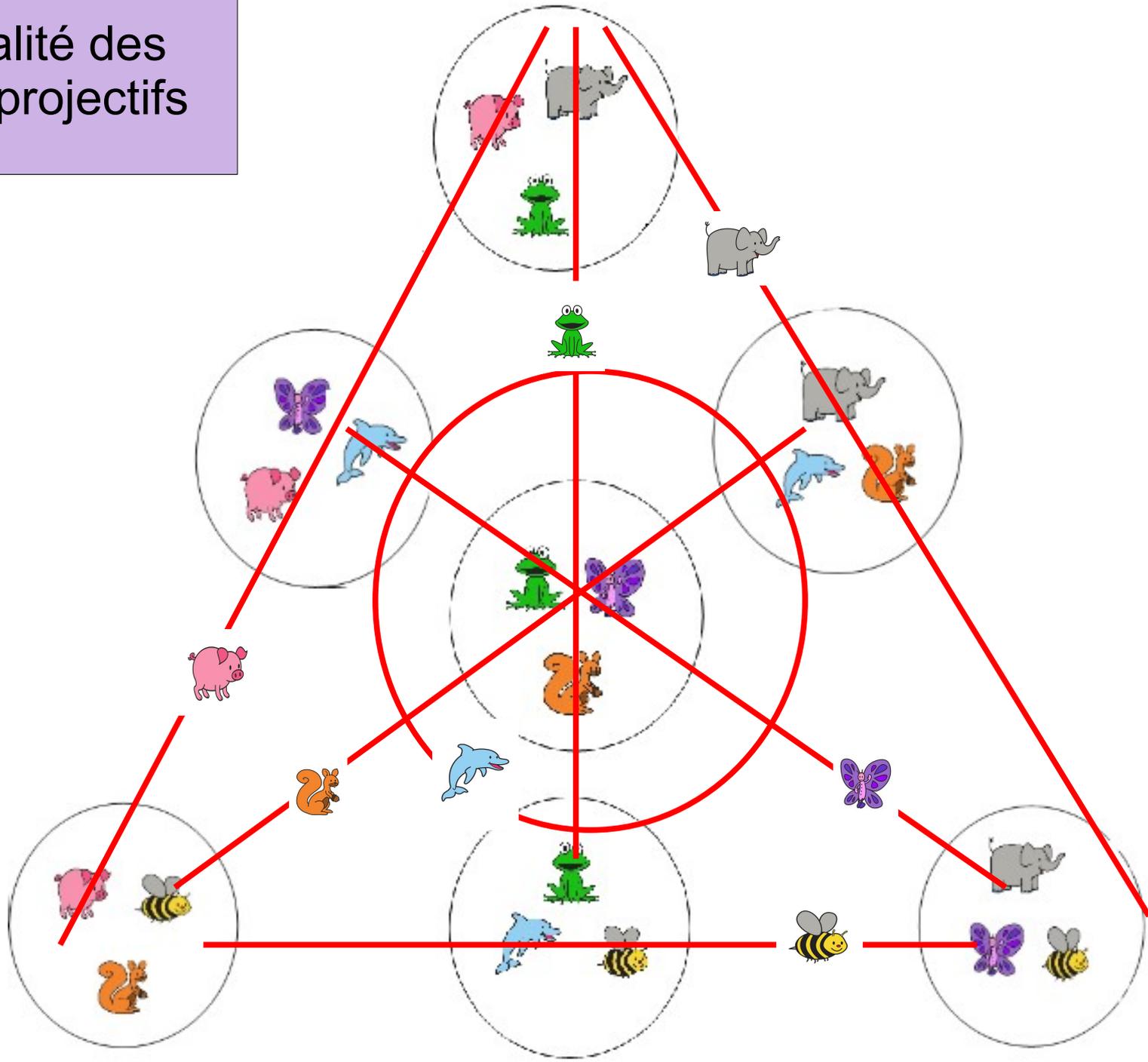
# Des symboles aux chiffres

			<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
			<b>1</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
			<b>1</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
			<b>2</b>	<b>7</b>	<b>4</b>
			<b>2</b>	<b>6</b>	<b>5</b>
			<b>3</b>	<b>6</b>	<b>4</b>
			<b>3</b>	<b>7</b>	<b>5</b>



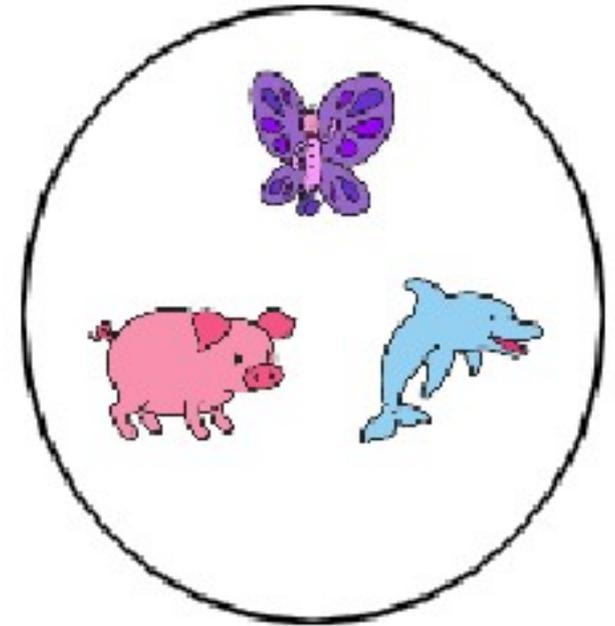
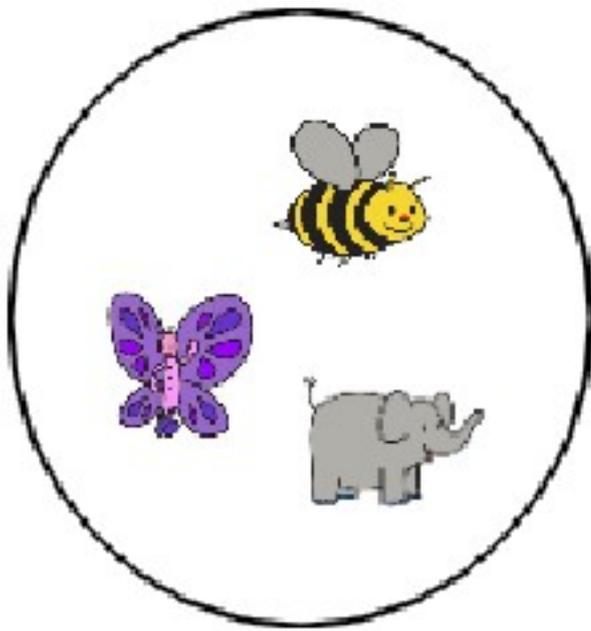


# La dualité des plans projectifs



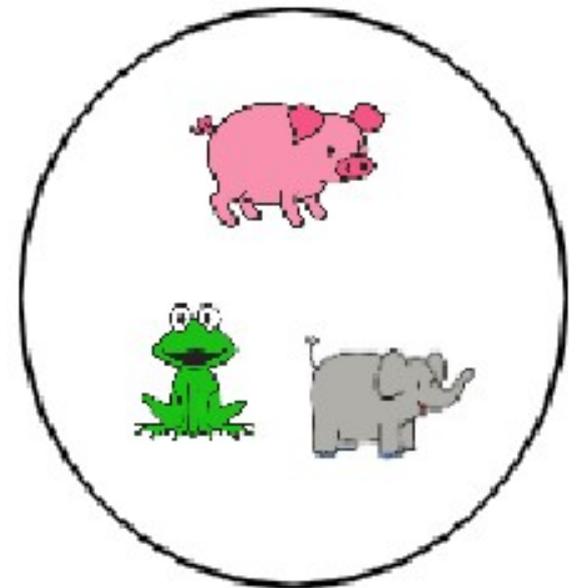
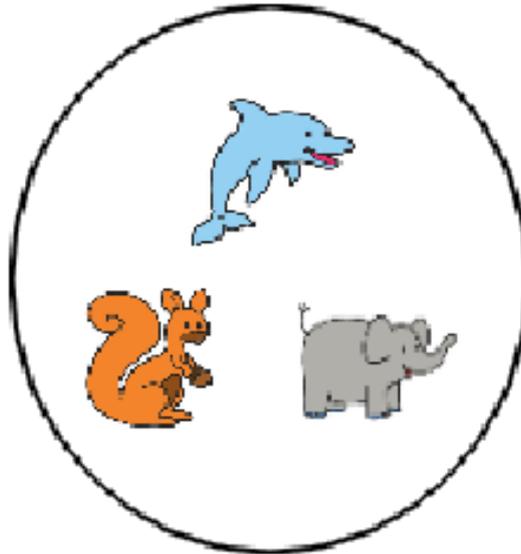
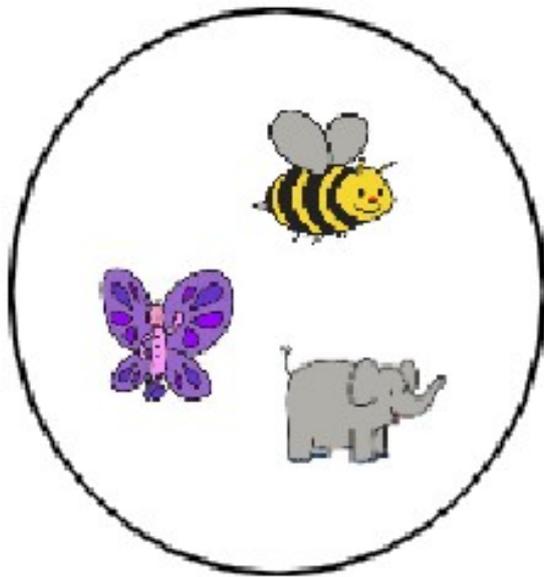
Toutes les droites ont le même nombre  
de points

*Toutes les cartes ont 3 symboles*



Dans un ensemble à  $N$  points par droites,  
toutes les points sont contenus dans  
exactement  $N$  droites.

*L'éléphant est contenu dans exactement  
3 droites.*



# Étape 1

1 \_ \_ \_

1 \_ \_ \_

1 \_ \_ \_

1 \_ \_ \_

# Étape 2

1 2 3 4

1 5 6 7

1 8 9 10

1 11 12 13

# Étape 3

1 2 3 4 2 - - -

1 5 6 7 2 - - -

1 8 9 10 2 - - -

1 11 12 13

# Étape 4

1 2 3 4

3 - - -

1 5 6 7

3 - - -

1 8 9 10

3 - - -

1 11 12 13

4 - - -

2 - - -

4 - - -

2 - - -

4 - - -

2 - - -

# Étape 5

1 2 3 4

3 5 - -

1 5 6 7

3 - - -

1 8 9 10

3 - - -

1 11 12 13

4 5 - -

2 5 - -

4 - - -

2 - - -

4 - - -

2 - - -

# Étape 6

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>		<b>3</b>	<b>5</b>	<b>-</b>	<b>-</b>
<b>1</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>		<b>3</b>	<b>6</b>	<b>-</b>	<b>-</b>
<b>1</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>		<b>3</b>	<b>7</b>	<b>-</b>	<b>-</b>
<b>1</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>		<b>4</b>	<b>5</b>	<b>-</b>	<b>-</b>
<b>2</b>	<b>5</b>	<b>-</b>	<b>-</b>		<b>4</b>	<b>6</b>	<b>-</b>	<b>-</b>
<b>2</b>	<b>6</b>	<b>-</b>	<b>-</b>		<b>4</b>	<b>7</b>	<b>-</b>	<b>-</b>
<b>2</b>	<b>7</b>	<b>-</b>	<b>-</b>					

# Étape 7

1 2 3 4

3 5 9 12

1 5 6 7

3 6 10 13

1 8 9 10

3 7 8 11

1 11 12 13

4 5 10 13

2 5 8 11

4 6 8 11

2 6 9 12

4 7 9 12

2 7 10 13

Nombres de points total d'un ensemble  
en fonction de l'ordre n

n+1

1 \_\_\_\_\_ n

$$n(n+1)+1 = n^2+n+1$$

Nombres de droites total d'un ensemble  
en fonction de l'ordre n

$n+1$

$1$

$n$

$n^2$

$$n^2 + n + 1$$

Un homme invite 31 personnes chez lui pendant le mois de janvier. Il souhaite passer chaque journée avec six d'entre eux en faisant en sorte de voir tous les invités le même nombre de fois et que deux invités ne passent la journée ensemble qu'une seule fois durant le mois.

Est-il possible de réaliser le souhait de cet homme, et si oui, comment ?

# Solution du problème (ORDRE 5

1	2	3	4	5	6
1	7	8	9	10	11
1	12	13	14	15	16
1	17	18	19	20	21
1	22	23	24	25	26
1	27	28	29	30	31
2	7	12	17	22	27
2	8	13	18	23	28
2	9	14	19	24	29
2	10	15	20	25	30
2	11	16	21	26	31
3	7	13	19	25	31
3	8	14	20	26	27
3	9	15	21	22	28
3	10	16	17	23	29
3	11	12	18	24	30
4	7	14	21	23	30
4	8	15	17	24	31
4	9	16	18	25	27
4	10	12	19	26	28
4	11	13	20	22	29
5	7	15	18	26	29
5	8	16	19	22	30
5	9	12	20	23	31
5	10	13	21	24	27
5	11	14	17	25	28
6	7	16	20	24	28
6	8	12	21	25	29
6	9	13	17	26	30
6	10	14	18	22	31

# Solution du problème (ORDRE 5

Benoit	Hugo	Stéphanie	Justine	Rachel	Anne
Benoit	Audrey	Martin	Chloé	Pauline	Lucien
Benoit	Louis	Romain	Jérémy	Gaelle	Noémie
Benoit	Adam	Jason	Caroline	Marie	Jean
Benoit	Paul	Mathieu	Lucas	David	Louise
Benoit	Catherine	Jacques	Pierre	Martine	Francis
Hugo	Audrey	Louis	Adam	Paul	Catherine
Hugo	Martin	Romain	Jason	Mathieu	Jacques
Hugo	Chloé	Jérémy	Caroline	Lucas	Pierre
Hugo	Pauline	Gaelle	Marie	David	Martine
Hugo	Lucien	Noémie	Jean	Louise	Francis
Stéphanie	Audrey	Romain	Caroline	David	Francis
Stéphanie	Martin	Jérémy	Marie	Louise	Catherine
Stéphanie	Chloé	Gaelle	Jean	Paul	Jacques
Stéphanie	Pauline	Noémie	Adam	Mathieu	Pierre
Stéphanie	Lucien	Louis	Jason	Lucas	Martine
Justine	Audrey	Jérémy	Jean	Mathieu	Martine
Justine	Martin	Gaelle	Adam	Lucas	Francis
Justine	Chloé	Noémie	Jason	David	Catherine
Justine	Pauline	Louis	Caroline	Louise	Jacques
Justine	Lucien	Romain	Marie	Paul	Pierre
Rachel	Audrey	Gaelle	Jason	Louise	Pierre

# ORDRE 11

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12  
1 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23  
1 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34  
1 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45  
1 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56  
1 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67  
1 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78  
1 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89  
1 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100  
1 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111  
1 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122  
1 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133

2 13 24 35 46 57 68 79 90 101 112 123  
2 14 25 36 47 58 69 80 91 102 113 124  
2 15 26 37 48 59 70 81 92 103 114 125  
2 16 27 38 49 60 71 82 93 104 115 126  
2 17 28 39 50 61 72 83 94 105 116 127  
2 18 29 40 51 62 73 84 95 106 117 128  
2 19 30 41 52 63 74 85 96 107 118 129  
2 20 31 42 53 64 75 86 97 108 119 130  
2 21 32 43 54 65 76 87 98 109 120 131  
2 22 33 44 55 66 77 88 99 110 121 132  
2 23 34 45 56 67 78 89 100 111 122 133

3 13 34 44 54 64 74 84 94 107 114 124  
3 14 24 45 55 65 75 85 95 108 115 125  
3 15 25 35 56 66 76 86 96 109 116 126  
3 16 26 36 46 67 77 87 97 110 117 127  
3 17 27 37 47 57 78 88 98 111 118 128  
3 18 28 38 48 58 68 89 99 112 119 129  
3 19 29 39 49 59 69 79 100 113 120 130  
3 20 30 40 50 60 70 80 90 114 121 131  
3 21 31 41 51 61 71 81 91 101 122 132  
3 22 32 42 52 62 72 82 92 102 112 133  
3 23 33 43 53 63 73 83 93 103 113 123

4 13 33 42 51 60 69 89 98 107 116 125  
4 14 34 43 52 61 70 79 99 108 117 126  
4 15 24 44 53 62 71 80 100 109 118 127  
4 16 25 45 54 63 72 81 90 110 119 128  
4 17 26 35 55 64 73 82 91 111 120 129  
4 18 27 36 56 65 74 83 92 101 121 130  
4 19 28 37 46 66 75 84 93 102 122 131  
4 20 29 38 47 67 76 85 94 103 112 132  
4 21 30 39 48 57 77 86 95 104 113 133  
4 22 31 40 49 58 78 87 96 105 114 123  
4 23 32 41 50 59 68 88 97 106 115 124

5 13 32 40 48 67 75 83 91 110 118 126  
5 14 33 41 49 57 76 84 92 111 119 127  
5 15 34 42 50 58 77 85 93 101 120 128  
5 16 24 43 51 59 78 86 94 102 121 129  
5 17 25 44 52 60 68 87 95 103 122 130  
5 18 26 45 53 61 69 88 96 104 112 131  
5 19 27 35 54 62 70 89 97 105 113 132  
5 20 28 36 55 63 71 79 98 106 114 133  
5 21 29 37 56 64 72 80 99 107 115 123  
5 22 30 38 46 65 73 81 100 108 116 124  
5 23 31 39 47 66 74 82 90 109 117 125

6 13 31 38 56 63 70 88 95 102 120 127  
6 14 32 39 46 64 71 89 96 103 121 128  
6 15 33 40 47 65 72 79 97 104 122 129  
6 16 34 41 48 66 73 80 98 105 112 130  
6 17 24 42 49 67 74 81 99 106 113 131  
6 18 25 43 50 57 75 82 100 107 114 132  
6 19 26 44 51 58 76 83 90 108 115 133  
6 20 27 45 52 59 77 84 91 109 116 123  
6 21 28 35 53 60 78 85 92 110 117 124  
6 22 29 36 54 61 68 86 93 111 118 125  
6 23 30 37 55 62 69 87 94 101 119 126

7 13 30 36 53 59 76 82 99 105 122 128  
7 14 31 37 54 60 77 83 100 106 112 129  
7 15 32 38 55 61 78 84 90 107 113 130  
7 16 33 39 56 62 68 85 91 108 114 131  
7 17 34 40 46 63 69 86 92 109 115 132  
7 18 24 41 47 64 70 87 93 110 116 133  
7 19 25 42 48 65 71 88 94 111 117 123  
7 20 26 43 49 66 72 89 95 101 118 124  
7 21 27 44 50 67 73 79 96 102 119 125  
7 22 28 45 51 57 74 80 97 103 120 126  
7 23 29 35 52 58 75 81 98 104 121 127

8 13 29 45 50 66 71 87 92 108 113 129  
8 14 30 35 51 67 72 88 93 109 114 130  
8 15 31 36 52 57 73 89 94 110 115 131  
8 16 32 37 53 58 74 79 95 111 116 132  
8 17 33 38 54 59 75 80 96 101 117 133  
8 18 34 39 55 60 76 81 97 102 118 123  
8 19 24 40 56 61 77 82 98 103 119 124  
8 20 25 41 46 62 78 83 99 104 120 125  
8 21 26 42 47 63 68 84 100 105 121 126  
8 22 27 43 48 64 69 85 90 106 122 127  
8 23 28 44 49 65 70 86 91 107 112 128

9 13 28 43 47 62 77 81 96 111 115 130  
9 14 29 44 48 63 78 82 97 101 116 131  
9 15 30 45 49 64 68 83 98 102 117 132  
9 16 31 35 50 65 69 84 99 103 118 133  
9 17 32 36 51 66 70 85 100 104 119 123  
9 18 33 37 52 67 71 86 90 105 120 124  
9 19 34 38 53 57 72 87 91 106 121 125  
9 20 24 39 54 58 73 88 92 107 122 126  
9 21 25 40 55 59 74 89 93 108 112 127  
9 22 26 41 56 60 75 79 94 109 113 128  
9 23 27 42 46 61 76 80 95 110 114 129

10 13 27 41 55 58 72 86 100 103 117 131  
10 14 28 42 56 59 73 87 90 104 118 132  
10 15 29 43 46 60 74 88 91 105 119 133  
10 16 30 44 47 61 75 89 92 106 120 123  
10 17 31 45 48 62 76 79 93 107 121 124  
10 18 32 35 49 63 77 80 94 108 122 125  
10 19 33 36 50 64 78 81 95 109 112 126  
10 20 34 37 51 65 68 82 96 110 113 127  
10 21 24 38 52 66 69 83 97 111 114 128  
10 22 25 39 53 67 70 84 98 101 115 129  
10 23 26 40 54 57 71 85 99 102 116 130

11 13 26 39 52 65 78 80 93 106 119 132  
11 14 27 40 53 66 68 81 94 107 120 133  
11 15 28 41 54 67 69 82 95 108 121 123  
11 16 29 42 55 57 70 83 96 109 122 124  
11 17 30 43 56 58 71 84 97 110 112 125  
11 18 31 44 46 59 72 85 98 111 113 126  
11 19 32 45 47 60 73 86 99 101 114 127  
11 20 33 35 48 61 74 87 100 102 115 128  
11 21 34 36 49 62 75 88 90 103 116 129  
11 22 24 37 50 63 76 89 91 104 117 130  
11 23 25 38 51 64 77 79 92 105 118 131

12 13 25 37 49 61 73 85 97 109 121 133  
12 14 26 38 50 62 74 86 98 110 122 123  
12 15 27 39 51 63 75 87 99 111 112 124  
12 16 28 40 52 64 76 88 100 101 113 125  
12 17 29 41 53 65 77 89 90 102 114 126  
12 18 30 42 54 66 78 79 91 103 115 127  
12 19 31 43 55 67 68 80 92 104 116 128  
12 20 32 44 56 57 69 81 93 105 117 129  
12 21 33 45 46 58 70 82 94 106 118 130  
12 22 34 35 47 59 71 83 95 107 119 131  
12 23 24 36 48 60 72 84 96 108 120 132