

Chapitre 1: Second degré

1 Polynômes du second degré

Définition:

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.

Remarque:

Les fonctions polynôme du second degré sont aussi appelées trinôme du second degré.

Exemple:

$f(x) = 5x^2 + 4x - 3$ est un trinôme du second degré avec $a = 5$, $b = 4$ et $c = -3$.

Propriété:

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $a > 0$ alors la représentation graphique de la fonction f est une parabole ayant "les branches tournées vers le haut" et f admet le tableau de variation suivant :

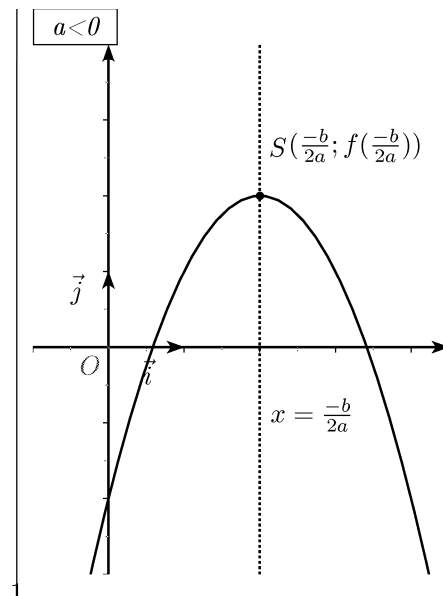
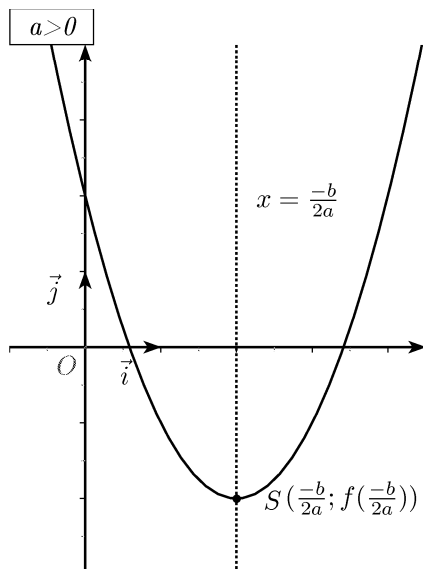
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$		$f(\frac{-b}{2a})$	

- Si $a < 0$ alors la représentation graphique de la fonction f est une parabole ayant "les branches tournées vers le bas" et f admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$		$f(\frac{-b}{2a})$	

Remarque:

Dans un repère orthogonal, la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ est un axe de symétrie de la parabole.



2 Résolution d'une équation du second degré

On sait que les polynômes du second degré sont des fonctions trinômes de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec a , b et c trois réels et $a \neq 0$. On peut montrer (en développant) que pour tous réels x ,

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

On posant $\Delta = b^2 - 4ac$ et on obtient

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Définition:

Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ est la **forme canonique** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

On cherche à résoudre l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. L'existence de solutions de cette équation dépend du signe du discriminant.

1^{er} cas : $\Delta > 0$

L'équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dans ce cas, on obtient la factorisation :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemple:

L'équation $2x^2 - 5x + 2 = 0$ admet deux solutions puisque $\Delta = 9 > 0$ donc

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{9}}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{9}}{4} = 2$$

et $2x^2 - 5x + 2$ admet la factorisation suivante :

$$2x^2 - 5x + 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)$$

2nd cas : $\Delta = 0$

L'équation admet une unique solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Dans ce cas, on obtient la factorisation :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

Exemple:

L'équation $3x^2 - 6x + 3 = 0$ admet une unique solution puisque $\Delta = 0$ donc

$$x_0 = \frac{6}{6} = 1$$

et $3x^2 - 6x + 3$ admet la factorisation suivante :

$$3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$$

3^{eme} cas : $\Delta < 0$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution.

Dans ce cas, le polynôme $ax^2 + bx + c$ n'admet pas de factorisation.

Exemple:

L'équation $8x^2 + x + 2 = 0$ n'admet aucune solution puisque $\Delta = -63 < 0$ et $8x^2 + x + 2$ n'admet pas de factorisation.

3 Résolution d'une inéquation du second degré

On s'intéresse à présent au signe du trinôme $ax^2 + bx + c$.

1^{er} cas : $\Delta > 0$

Pour tout réel x , $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

On obtient le tableau de signe suivant (en supposant $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$		-	+	
$x - x_2$		-	-	+
$a(x - x_1)(x - x_2)$		signe de a	signe de $(-a)$	signe de a

2nd cas : $\Delta = 0$

Pour tout réel x , $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ où $x_0 = \frac{-b}{2a}$ donc $ax^2 + bx + c$ est du signe de a , sauf pour $x = x_0$, où le trinôme s'annule.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$a(x - x_0)^2$		signe de a	signe de a

3^{eme} cas : $\Delta < 0$

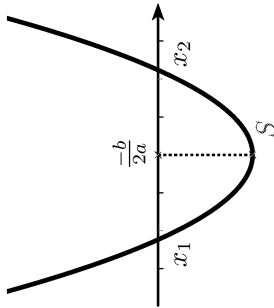
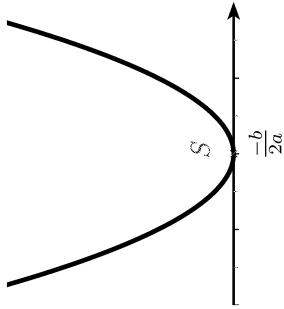
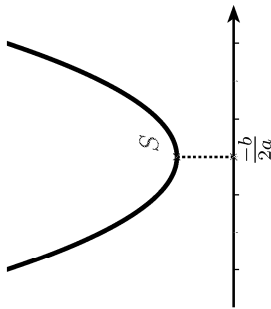
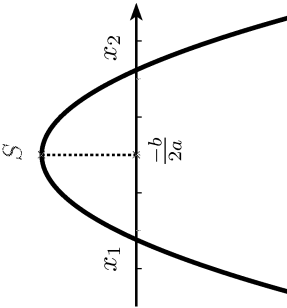
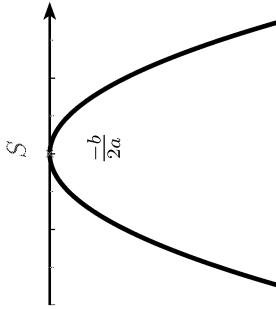
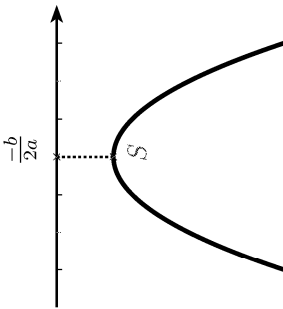
Pour tout réel x , $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ et :

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2} > 0$$

donc $ax^2 + bx + c$ est du signe de a .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		signe de a

4 Tableau récapitulatif

solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$		$\Delta > 0$		$\Delta = 0$	$\Delta < 0$																								
		$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$		$x_0 = \frac{-b}{2a}$	pas de solutions																								
factorisation de l'expression $ax^2 + bx + c$ $a > 0$		$a \left(x - x_1 \right) \left(x - x_2 \right)$		$a \left(x - x_0 \right)^2$	aucune factorisation																								
																													
$a < 0$																													
signe du trinôme $ax^2 + bx + c$		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de $(-a)$</td><td>signe de a</td></tr></table>		x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	signe de a	0	signe de $(-a)$	signe de a	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	signe de a	0	signe de a	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	signe de a	
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																									
$f(x)$	signe de a	0	signe de $(-a)$	signe de a																									
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$																										
$f(x)$	signe de a	0	signe de a																										
x	$-\infty$	$+\infty$																											
$f(x)$	signe de a																												