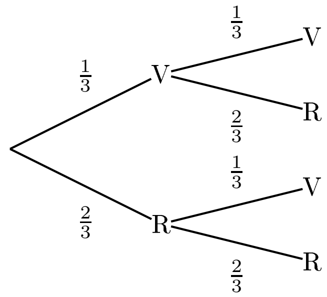
Vers les arbres pondérés

Une première urne et tirage avec remise

On considère une urne dans laquelle il y a 3 boules : deux sont rouges $R1$ et $R2$ et une est verte $V1$.
On tire une boule au hasard, on note sa couleur puis on la remet dans l'urne. Ensuite, on tire une deuxième boule et on note sa couleur.

1. Construire un arbre représentant la situation.
2. Combien y a-t-il d'issues possibles ? Quelle loi de probabilité peut-on utiliser ici ?
3. Calculer les probabilités des événements suivants :
   - A : « les deux boules sont vertes » ;
   - B : « la première boule est verte » ;
   - C : « obtenir une boule verte et une boule rouge ».
4. Si on suppose qu'il y a dix boules (4 vertes et 6 rouges) dans l'urne, combien d'issues possibles y aurait-il ? Un arbre serait-il envisageable ?

Parfois, suivant les données que l'on a, on peut « résumer »l'arbre en mettant sur les branches les probabilités correspondantes. On dit que l'arbre est pondéré. Dans le cas où il y a les trois boules, l'arbre pondéré serait le suivant :



Une deuxième urne et tirage avec remise

On considère une urne dans laquelle il y a 7 boules : deux sont rouges $R1$ et $R2$ et cinq sont vertes $V1$, $V2$, $V3$, $V4$ et $V5$.
On tire une boule au hasard, on note sa couleur puis on la remet dans l'urne. Ensuite, on tire une deuxième boule et on note sa couleur.

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

> Pour calculer des probabilités dans un arbre pondéré, on peut alors se servir des propriétés suivantes :
> → La probabilité d'une issue représentée par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.
> → La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues associées aux chemins qui conduisent à la réalisation de A.

2. Calculer les probabilités des événements suivants :
   - S « les deux boules sont rouges » ;
   - T « obtenir une boule verte et une boule rouge ».

La même deuxième urne et un tirage sans remise

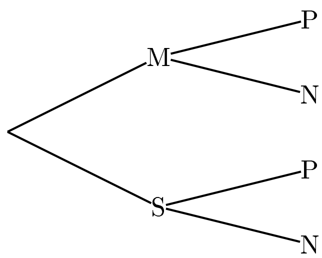
On considère la même deuxième urne avec les 7 boules. Par contre, on ne remet pas la première boule dans l'urne avant de faire le deuxième tirage.

1. Supposons qu'on ait tiré une boule verte en premier, quelle est la probabilité qu'on tire une boule rouge en deuxième ?
2. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
3. Calculer les probabilités des événements suivants :
   - G « les deux boules sont rouges » ;
   - H « obtenir une boule verte et une boule rouge ».

Applications

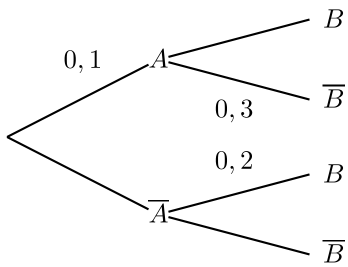
Exercice 1:
Dans un pays européen, 12% des moutons sont atteints par une maladie. Un test de dépistage de cette maladie vient d'être mis sur le marché mais il n'est pas totalement fiable.
Une étude a montré que quand le mouton est malade le test est positif dans 93% des cas ; quand le mouton est sain, le test est négatif dans 97% des cas.
On note M si le mouton est malade et S s'il est sain. On note P si le test est positif, N si le test est négatif.

1. Compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Quelle est la probabilité que le test soit positif ?

Exercice 2:
On considère l'arbre de probabilités ci-contre, dans lequel les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont les évènements contraires respectivement des évènements A et B.



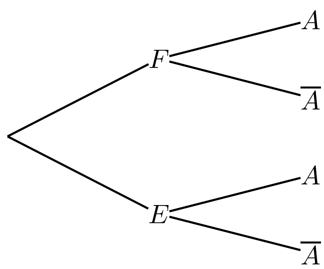
1. Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap B$.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement B.

Exercice 3:
On considère l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé équilibré qui a deux faces noires et quatre faces blanches. On lance ensuite un deuxième dé équilibré dont les faces sont numérotées de la façon suivante : deux faces portent le chiffre 1, une le chiffre 2 et trois le chiffre 3. On regarde la couleur du premier dé et le numéro du deuxième. Représenter la situation par un arbre pondéré puis calculer la probabilité d'obtenir la couleur noire et le numéro 2.

Exercice 4:
Durant le mois de mars 2011, 125 clients ont réservé un voyage dans une agence. Pour chacun de ces clients, un dossier a été constitué. En consultant ces dossiers, on constate que 50 clients ont choisi un voyage en France ; 48 % des clients ayant choisi un voyage en France ont souscrit une assurance annulation et 56 % des clients ayant choisi un voyage à l'étranger ont souscrit une assurance annulation. On choisit un dossier de ces clients au hasard. On suppose que chaque dossier a la même probabilité d'être choisi. On définit les évènements suivants :

- F : « le dossier est celui d'un client ayant choisi un voyage en France » ;
- E : « le dossier est celui d'un client ayant choisi un voyage à l'étranger » ;
- A : « le dossier est celui d'un client ayant souscrit une assurance annulation ».

1. Montrer que la probabilité $p(F)$ de l'évènement F est égale à 0,4.
2. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités représenté ci-dessous :



3. Calculer la probabilité de l'évènement $F \cap A$.
4. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $0,528$.