Chapitre 3: Probabilités

1 Vocabulaire des événements

On réalise les trois expériences suivantes :

On lance une pièce de monnaie équilibrée et on regarde se face supérieure.	On lance un dé à 6 faces équilibré et on regarde le nombre de points sur sa face supérieure.	On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

Définition:
Dans chacune des expériences précédentes, chaque résultat possible est une ***issue*** *de l'expérience. De plus, chaque issue ne dépend pas des issues précédentes. On dit donc que ces expériences sont* ***aléatoires****.*

Remarques:

- *Une expérience aléatoire est uniquement due au* ***hasard****.*
- *Une expérience aléatoire peut-être réalisée autant de fois que l'on veut, dans les mêmes conditions.*

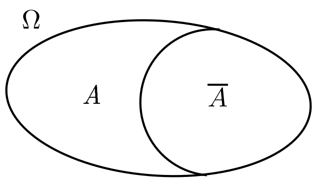
Définition:
*L'ensemble Ω de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé l'****univers*** *de l'expérience.*

Exemples:
Pour les trois expériences précédentes :

La pièce de monnaie	*Le dé à 6 faces*	*Le jeu de carte*
$\Omega = \{P; F\}$	$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$	$\Omega = \{7Co; 8Co; \dots; RT; 1T\}$

Définition:

- *Un* ***événement*** *A est une partie de l'univers Ω.*
- *L'****événement contraire*** *de A, noté $\overline{A}$, est la partie de Ω constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A.*



- *On dit que chaque issue qui est dans la partie A* ***réalise l'événement*** *A.*
- *Un* ***événement élémentaire*** *est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.*

Exemples:
Pour les trois expériences précédentes :

La pièce de monnaie	*Le dé à 6 faces*	*Le jeu de carte*
« On obtient face » est un événement élémentaire.	*« On obtient un 7 » est un événement qui n'est réalisé par aucune issue, on dit que c'est un événement impossible.*	*« On obtient un coeur » est un événement réalisé par huit issues. Son événement contraire, « On n'obtient pas un coeur » est lui réalisé par 24 issues.*

2 Probabilité d'un événement

On considère une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$. Pour modéliser l'expérience, on attribue à chacun des éléments élémentaires $\{e_i\}$ un nombre positif noté p_i, qui est par définition sa probabilité. Et cela de telle sorte que :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$$

Pour estimer ces probabilités p_i, on procède selon les cas à des calculs, des simulations ou des sondages.

Parfois, la théorie assure a priori que les n événements ont tous la même probabilité, qui est alors égale à $\frac{1}{n}$. On dit alors que ces n événements sont **équiprobables**. Ainsi pour tout $\{e_i\}$,

$$p_i = \frac{1}{n}$$

Exemples:
Pour chacune des expériences initiales on a équiprobabilité :

La pièce de monnaie	*Le dé à 6 faces*	*Le jeu de carte*
$P(\{P\}) = P(\{F\}) = \frac{1}{2}$	$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$	$P(\{7Co\}) = \cdots = P(\{1T\}) = \frac{1}{32}$

Définition:
La probabilité de l'événement A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A.

Exemple:
Pour le lancer d'un dé équilibré ou non, $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Si $A = \{3; 6\}$ alors $P(A) = P(\{3\}) + P(\{6\})$

Remarques:
- *Pour tout événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$.*
- *Pour l'ensemble qui ne contient aucun élément, appelé ensemble vide et noté $\oslash$, on a $P(\oslash) = 0$.*
- *$P(\Omega) = 1$ donc pour tout événement A,*

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad \textit{donc} \quad P\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Propriété:
Dans le cas où les événements élémentaires sont équiprobables, on a :

$$P(A) = \frac{\textit{nombre d'issues de } A}{\textit{nombre total d'issues}}$$

Exemple:
Pour le lancer d'un dé équilibré, $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Si $A = \{3; 6\}$ alors

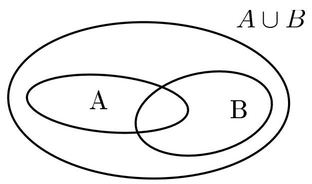
$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \textit{et} \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$$

3 Réunion et intersection

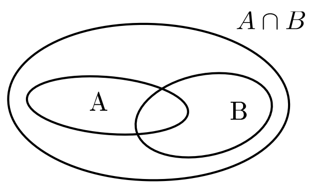
Pour le lancer d'un dé équilibré ou non, $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. On considère les deux événements suivants :

- A est l'événement « sortie d'un nombre multiple de 3 » ; $A = \{3; 6\}$.
- B est l'événement « sortie d'un nombre inférieur ou égal à 3 » ; $B = \{1; 2; 3\}$.

On définit la réunion de A et B comme l'ensemble des éléments qui sont dans A ou B : $A \cup B = \{1; 2; 3; 6\}$



On définit l'intersection de A et B comme l'ensemble des éléments qui sont dans A et B : $A \cap B = \{3\}$



Théorème:
Pour tous événements A et B de Ω,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Remarque:
*Lorsque A et B n'ont pas d'issue en commun on dit qu'ils sont **incompatibles**. On a $A \cap B = \emptyset$ et dans ce cas :*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$