Chapitre 6: Dérivation

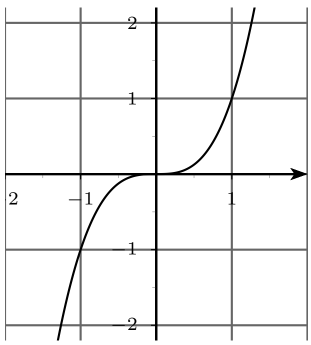
1 Fonctions polynômes du troisième degré

Définition:
La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Propriété:
La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0$ donc elle admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
x^3	$-0+$

Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine :



Définition:
On appelle fonction polynôme du troisième degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.

Exemples:
- $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + x + 1$ *est un polynôme du troisième degré avec* $a = 5$, $b = -2$, $c = 1$ *et* $d = 1$.
- $g(x) = x(x-1)(x+2)$ *est un polynôme du troisième degré avec* $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$ *et* $d = 0$ *puisque :*

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & x(x-1)(x+2) \\ & = & (x^2 - x)(x+2) \\ & = & x^3 + 2x^2 - x^2 - 2x \\ & = & x^3 + x^2 - 2x \end{array}$$

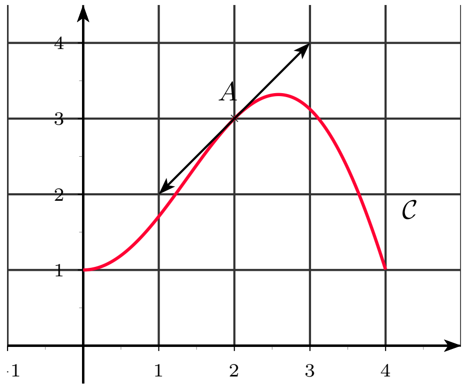
2 Nombre dérivé

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Si la courbe $\mathcal{C}$ admet en un point $A(a; f(a))$ une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées, on appelle nombre dérivé en a ***le nombre égal au coefficient directeur de la tangente*** *à $\mathcal{C}$ en A et on le note $f'(a)$.*
De plus, la tangente à $\mathcal{C}$ en A a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple:
Ci-dessous, la fonction représentée graphiquement par la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente au point $A(2;3)$. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 est 1 donc le nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse 2 est 1. On le note :

$$f'(2) = 1$$



La tangente à la courbe a donc pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x-2)+f(2) \\ y &= 1(x-2)+3 \\ y &= x+1 \end{aligned}$$

3 Fonction dérivée

Définition:
La fonction dérivée d'une fonction f est le fonction qui à tout réel x associe $f'(x)$. Cette fonction est notée f'.

Remarque:
Lorsqu'une fonction f admet une fonction dérivée, on dit qu'elle est ***dérivable****.*

Propriété:
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\quad f'(x)=2ax+b$.

Propriété:
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\quad f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

4 Lien avec les variations d'une fonction

Théorème: (admis)
f est une fonction dérivable sur un intervalle I :

- *si pour tout réel x de I, $f'(x)\geq 0$ alors f est croissante sur I.*
- *si pour tout réel x de I, $f'(x)\leq 0$ alors f est décroissante sur I.*
- *si pour tout réel x de I, $f'(x)=0$ alors f est constante sur I.*

Exemple:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$. f est une fonction polynôme du troisième degré donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\times\frac{1}{3}\times x^2+2\times(-1)x+(-3) \\ &= x^2-2x-3 \end{aligned}$$

Pour déterminer les variations de f, il faut étudier le signe de f' qui est une fonction polynôme du second degré :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2-4ac \\ &= (-2)^2-4*1*(-3) \\ &= 4+12 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$\Delta>0$ donc $f(x)=0$ admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

soit

$$x_1=\frac{2-4}{2}=-1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{2+4}{2}=3$$

f' admet donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que f est croissante sur $]-\infty;-1]$, décroissante sur $[-1;3]$ et croissante sur $[-1;+\infty[$. On résume ces résultats dans le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	

puisque $f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 1 = \frac{8}{3}$ *et* $f(3) = \frac{1}{3}3^3 - 3^2 - 3 \times 3 + 1 = -8$.

Finalement, on peut tracer la courbe de la fonction f pour vérifier nos résultats :